LIBRO PAES MATEMÁTICAS

PAES M2 ADMISIÓN 2024

@salvatupaes

BIENVENIDA

¡MUCHAS GRACIAS POR TU COMPRA!

Te queremos felicitar por atreverte a enfrentar esta prueba, esperamos que este libro te entregue las herramientas necesarias para poder avanzar en tu estudio y entrar en la carrera que deseas.

Hemos creado este libro con mucho esfuerzo y dedicación, en el cual encontraras todos los contenidos que entraran en la PAES M2 de manera resumida.

De todo corazón esperamos que este libro te sea útil, y decirte que nunca te rindas y seas perseverante en este proceso.

Por último, te invitamos a que nos sigas en nuestras redes sociales, en donde subiremos material, videos, y más para seguir apoyándote en este camino.

¡Te deseamos éxito en todas tus metas!

@salvatupaes

@salvatupaes

ÍNDICE

Salva tu PAES

NÚMEROS


Irracionales
√4 π
Números Reales
Racionales
2/3
0,45678
Enteros
-2
-11
Naturales
3
9
27

CONJUNTOS NUMERICOS

Números Naturales

Conjunto de números positivos, que permiten contar u ordenar elementos.

No incluye el cero.

Números Enteros

Incluyen a los números naturales, números negativos y al cero.

El 0 no es negativo ni positivo.

Números Racionales

Son aquellos que se pueden expresar como fracción de números enteros con denominador distinto de 0.

NÚMEROS

PROPIEDADES

Conmutativa

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Asociativa

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

ELEMENTOS

Elemento Neutro

Neutro aditivo es **0**

$$a + \mathbf{0} = a$$

Neutro multiplicativo es **1** → $a \cdot \mathbf{1} = a$

Inverso Aditivo

El inverso aditivo (opuesto) de a es $-\boldsymbol{a}$

$$a + (-\boldsymbol{a}) = 0$$

Inverso Multiplicativo

El inverso multiplicativo (recíproco) de a es

$$\frac{1}{a} \to a \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} = 1$$

VALOR ABSOLUTO

El **valor absoluto** de un numero a se simboliza como $|a|$ y es la distancia positiva entre este número y el cero.

$$|a| = a, \qquad si\ a > 0$$

$$|a| = -a, \qquad si\ a < 0$$

Ejemplos:

$$|70| = 70$$

$$|-35| = 35$$

$$|0| = 0$$

NÚMEROS ENTEROS

GENERALIDADES

- El **sucesor** de un número entero n es $(\boldsymbol{n+1})$.
- El **antecesor** de un número entero n es $(\boldsymbol{n-1})$.
- Un **número par** es un número entero que puede escribirse de la forma $\boldsymbol{2n}$
- Un **número impar** es un número entero que puede escribirse de la forma $(\boldsymbol{2n-1})$ o $(\boldsymbol{2n+1})$.
- Si $\boldsymbol{a}$ es un **número par**, el **sucesor par** de a es $(\boldsymbol{a+2})$ y su **antecesor par** es $(\boldsymbol{a-2})$.
- Si $\boldsymbol{b}$ es un **número impar**, el **sucesor par** de b es $(\boldsymbol{b+2})$ y su **antecesor** par es $(\boldsymbol{b-2})$.

REGLAS DE DIVISIBILIDAD

- Un número es **divisible por 2** si su ultimo digito es par.
- Un número es **divisible por 3** si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.
- Un número es **divisible por 4** si sus dos últimos dígitos son cero o forman un múltiplo de 4.
- Un número es **divisible por 5** si su ultimo digito es cero o 5.
- Un número es **divisible 6** si es divisible por 2 y 3 a la vez.
- Un número es **divisible por 10** si su ultimo digito es 0.

ADICIONALES

- Un número es **divisible por 8** si sus tres últimos dígitos son cero o forman un múltiplo de 8.
- Un número es **divisible por 9** si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.
- En general, un numero entero es **divisible por $\boldsymbol{m \cdot n}$** si es divisible por m y n a la vez.
- El cero **no es divisor** de ningún número, y **es múltiplo** de todos los números enteros.

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Un **número primo** es aquel número natural que solo tiene dos divisores positivos: el mismo número y el 1.

Ejemplos: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …}

Un **número compuesto** es aquel número natural que tiene más de dos divisores.

Ejemplos: {4, 6, 8, 9, 10, 12,14, …}

El numero 1 no es primo ni compuesto.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M)

Es el menor número que es múltiplo común de dos o más números.

¿CÓMO CALCULARLO?

1. Descomponer en números primos.

2. Multiplicar todos los números primos encontrados y si existen números primos comunes, se considera el que posea mayor exponente.

Ejemplo: Obtener el M.C.M de 9 y 15

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$M.C.M(9, 15) = 3^2 \cdot 5 = 45$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D)

Es el mayor entero positivo que es divisor de un grupo de números enteros.

¿CÓMO CALCULARLO?

1. Descomponer en números primos.

2. Multiplicar los números primos comunes con menor exponente.

Ejemplo: Encontrar el M.C.D de 6 y 28

$$6 = 3 \cdot 2$$

$$24 = 7 \cdot 2 \cdot 2 = 7 \cdot 2^2$$

$$M.C.D(6, 28) = 2$$

OPERATORIA NUMEROS ENTEROS ($\mathbb{Z}$)

ADICIÓN

Para sumar números de **igual signo**, se conserva el signo en común.

Ejemplos:

$$15 + 34 = 49$$

$$-25 - 17 = -(25 + 17) = -42$$

Para sumar números de **distinto signo**, al mayor número en valor absoluto se le debe restar el menor número en valor absoluto, y se debe conservar el signo del mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$$-8 + 15 = +(15 - 8) = 7$$

$$-24 + 9 = -(24 - 9) = -16$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Para multiplicar y dividir se debe seguir la regla de los signos, es decir:

$$+ \cdot + = + \rightarrow \text{más por más} = \text{más}$$

$$+ \cdot - = - \rightarrow \text{más por menos} = \text{menos}$$

$$- \cdot + = - \rightarrow \text{menos por más} = \text{menos}$$

$$- \cdot - = + \rightarrow \text{menos por menos} = \text{más}$$

Ejemplos:

$$8 \cdot -10 = -80$$

$$-5 \cdot 9 = -45$$

$$-7 \cdot -12 = 84$$

$$64 \div -8 = -8$$

ORDEN EN LAS OPERACIONES

Al realizar múltiples operaciones en conjunto, se debe seguir un orden que entrega prioridades a operación:

1. Paréntesis
2. Potencias
3. Multiplicación y División (De izquierda a derecha)
4. Adición y Substracción (De izquierda a derecha)

Este orden es conocido como “PAPOMUDAS” o “PEMDAS” en inglés.

Ejemplo:

$$((3)^2 + 4 \div 2) - 7$$

$$= (9 + 4 \div 2) - 7$$

$$= (9 + 2) - 7$$

$$= 11 - 7$$

$$= 4$$

NÚMEROS RACIONALES

CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES

- **Fracción Propia:** Corresponde a fracciones del tipo $\frac{a}{b}$ tal que $|a| < |b|$.
  Ejemplos: $\frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{15}{27}$
- **Fracción Impropia:** Corresponde a fracciones del tipo $\frac{a}{b}$ tal que $|a| > |b|$.
  Ejemplos: $\frac{6}{5}, \frac{31}{27}, \frac{15}{11}$

OPERATORIA DE FRACCIONES

Adición o Substracción	Multiplicación	División
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

RELACIONES ENTRE FRACCIONES

- **Igualdad:** Sean dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se tiene que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a \cdot d = b \cdot c$

- **Orden:** Sean dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se tiene que:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \text{ si } a \cdot d > b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ si } a \cdot d < b \cdot c$$

- **Número Mixto:**

$$a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$$

CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

- **Finito:** Son aquellos decimales que tienen una cantidad determinada de decimales.

  Ejemplos: $0{,}31$; $4{,}925$; $9{,}225$

- **Infinitos o Periódicos:** Son aquellos decimales que tienen un digito o un grupo de dígitos que se repiten infinitamente luego de la coma, que es llamada parte periódica y se escribe con una barra encima.

  Ejemplos: $3{,}3737373737\ldots = 3,\overline{37}$; $0{,}7777\ldots = 0,\overline{7}$

- **Infinito Semi-Periódico o Semi-Infinito:** Son aquellos decimales que tienen una parte decimal finita, seguida de una parte periódica.

  Ejemplos: $0{,}45999\ldots = 0{,}45\overline{9}$; $1{,}52484848\ldots = 1{,}52\overline{48}$

OPERATORIA DE NUMEROS DECIMALES

Multiplicación: Para multiplicar números decimales se debe realizar como si no tuvieran coma. Luego, contar el número total de lugares decimales en esta multiplicación, y colocar la coma decimal en el resultado. (Contando desde la derecha)

División: Para dividir números decimales se debe realizar como si fuera una división normal de números enteros. Luego, contar el número total de lugares decimales en esta división, y colocar la coma decimal en el resultado. (Contando desde la derecha)

TRANSFORMACIÓN DE NÚMERO DECIMAL A FRACCIÓN

	Numerador	Denominador	Ejemplo
Finito	El decimal completo sin la coma.	Un 1 y tantos 0 como decimales existan.	$0{,}075 = \frac{75}{1000}$
Infinito	Se escribe el numero completo (sin la coma) y se resta con la parte no periódica.	Un numero formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo.	$2,\overline{457} = \frac{2457 - 2}{999}$
Semiperiódico	Se escribe todo el numero (sin la coma) y se resta con la parte no periódica.	Se escribe tantos nueve como dígitos posea el período, seguidos de tantos ceros como dígitos tenga el anteperíodo.	$5{,}4\overline{78} = \frac{5478 - 78}{990}$

APROXIMACIONES

Redondeo	Truncamiento
Primero, hay que identificar la posición a redondear, luego existen dos casos: Si la cifra siguiente es **mayor o igual a 5**, entonces se aumenta en 1 el digito que estamos redondeando. Ejemplo: Al redondear 4,685 a la centésima se obtiene 4,69. Si la cifra siguiente **es menor a 5**, entonces se deja el mismo digito. Ejemplo: Al redondear 9,844 a la centésima se obtiene 9,84.	Primero, hay que identificar la posición que se desea truncar. Luego, se debe **cortar o cerrar** el numero en esa posición y eliminar todos los decimales que lo siguen. Ejemplo: Al truncar 8,1396 a la milésima se obtiene 8,139.

NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) es la unión del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) con los irracionales ($\mathbb{Q}'$).

OPERATORIA EN $\mathbb{R}$

- El resultado de una operación entre racionales **es siempre** otro número racional (excluyendo la división por cero).
- Las operaciones entre números irracionales **no siempre** resultan un número irracional.
- El resultado de las operaciones entre un numero racional y un irracional es un numero irracional, **exceptuándose la multiplicación y la división por cero**.

PORCENTAJE

RAZÓN

La razón es una relación entre dos números a través de una división o cociente.

$$a:b \;\; o \;\; \frac{a}{b}$$

PROPORCIÓN

Una proporción es una relación entre dos o más razones que pueden iguales o diferentes.

$$a : b = c : d \text{ o } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

PORCENTAJE

El tanto por ciento es un caso particular de proporcionalidad directa en que uno del os términos de la proporción es 100:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{100} \rightarrow a = \frac{c}{100} \cdot b \rightarrow a = c\% \cdot b$$

POTENCIAS

Una potencia corresponde a la multiplicación de n veces un número a, es decir:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$

Propiedades

Sea n, m números enteros positivos:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n$$

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1, con\ a \neq 0$$

$$0^n = 0\ , con\ n \neq 0$$

$$0^0 = indeterminado$$

$$1^n = 1$$

RAÍCES

Sea **a** real positivo con n y k enteros, entonces:

$$\boldsymbol{a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}}$$

PROPIEDADES

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a} \cdot \sqrt[n \cdot m]{b}$$

$$b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}$$

$$\sqrt{(a)^2} = |a|$$

LOGARTIMOS

El logaritmo de un número real positivo **b** en base **a,** positiva y distinta de 1, es el número **m** al que se debe elevar la base **a** para obtener dicho número.

$$\mathbf{log_a b = m \ \leftrightarrow \ a^m = b}$$

- En la expresión se cumple que: $\mathbf{b > 0, a \neq 0, a > 0}$
- La expresión se lee: "el logaritmo de **b** en base **a** es **m**".
- El logaritmo es la operación inversa de la exponenciación.
- $\log_{10}(c) = \log\,(c)$
- Logaritmos conocidos:

$\log_a 1 = 0$ $\qquad$ $\log_a a^m = m$

$\log_a a = 1$ $\qquad$ $a^{\log_a(c)} = c$

PROPIEDADES

Sean $b > 0, a \neq 0, a > 0$:

- **Logaritmo de un producto**: $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- **Logaritmo de un cuociente**: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- **Logaritmo de una potencia**: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
- **Logaritmo de una raíz:** $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b,\ \text{con } n > 0$
- **Cambio de base:** $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a x = \log_a y \ \longrightarrow \mathbf{x = y}$
- $\mathbf{\log_{c^n} a^n = \log_c a},\ n \neq 0, con\ a, c > 0\ y\ c \neq 1$

RELACIÓN ENTRE POTENCIA Y LOGARITMO

El numero m, al que se debe elevar la base a para obtener el numero b corresponde a:

$$\boldsymbol{a^m = b \leftrightarrow \log_a b = m}, \qquad b > 0, a > 0, a \neq 1$$

RELACIÓN ENTRE RAÍZ Y LOGARITMO

El numero $\frac{m}{n}$ al que se debe elevar la base a para obtener b corresponde a:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = b \leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = b \leftrightarrow \log_a b = \frac{m}{n}}, \qquad b > 0, a > 0, a \neq 1$$

MATEMÁTICA FINANCIERA

CAMBIO PORCENTUAL

Si una cantidad T aumenta en un P%, entonces se cumple lo siguiente:

- Cantidad Inicial: T
- Cantidad Final: $(100 + P)\% \cdot T$
- Cantidad que Aumento: $P\% \cdot T$

INTERÉS COMPUESTO

El interés compuesto es aplicar un aumento porcentual en $t\%$, de forma seguida por n veces. Su fórmula es la siguiente:

$$\boldsymbol{C_f = C_i \cdot (1 + \frac{t}{100})^n}$$

- C_f: capital final
- C_i: capital inicial
- t: tasa de interés
- n: periodo de tiempo asociado a la tasa de interés

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

LENGUAJE ALGEBRAICO

Una variable corresponde a una cantidad desconocida que se representa con una letra, con la cual se puede operar prácticamente de la misma forma que se hace con los números.

Algunas de las más comunes son:

- "El doble de un número": $2x$
- "La mitad de un número": $\frac{x}{2}$
- "El producto de dos números distintos": $x \cdot y$
- "El quíntuplo de un número, sumado a su antecesor es 10": $5x + (x - 1) = 10$

OPERATORIA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Un **término algebraico (o monomio)** es un elemento formado por coeficientes numéricos y variables escrito como producto, fracción y/o potencia.

El **grado de un término algebraico** corresponde a la suma de valores de los exponentes de sus variables.

Ejemplo: El grado de $x^4 \cdot y^8$ es 12.

Una **expresión algebraica** es un elemento formado por la suma y/o resta de términos algebraicos. Pueden ser clasificadas de la siguiente forma:

- Monomio: Expresión de un solo término.
- Binomio: Expresión de dos términos.
- Trinomio: Expresión de tres términos.
- Polinomio: Expresión de dos o más términos.

El **grado de una expresión algebraica** corresponde al mayor grado de los términos que los componen.

Ejemplo: El grado de $13x^3 + x^2 \cdot y^9 - x^7 \cdot y^8$ es 15.

REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Los términos semejantes son aquellos que tienen las mismas variables con el mismo exponente. Por ejemplo: $5x, -34x, \frac{1}{79}x$ son términos semejantes.

Para reducir términos semejantes, se pueden sumar y/o restar los coeficientes numéricos, manteniendo las variables con sus respectivos exponentes.

Por ejemplo:

$$3a^4b - b^2 + 4a^4b - 3$$
$$= (3a^4b + 4a^4b) - b^2 - 3$$
$$= 7a^4b - b^2 - 3$$

MULTIPLICACIÓN DE TÉRMINOS ALGEBRAICOS

- **Monomio por Monomio**: Multiplicación de variables y coeficientes numéricos.

  Ejemplo:

$$10x^5y^2 \cdot 2x^2yz = 10 \cdot 2 \cdot x^{5+2}y^{2+1} \cdot z = 20x^7y^3z$$

- **Monomio por Polinomio**: Se aplica la ley distributiva.

  Ejemplo:

$$5x \cdot \left(3a^2 - 4y^6 + \frac{1}{5}b^3\right) = 5x \cdot 3a^2 + 5x \cdot -4y^6 + 5x \cdot \frac{1}{5}b^3$$
$$= 15a^2x^2 - 20y^6x + b^3x$$

- **Polinomio por Polinomio**: Se aplica ley distributiva.

  Ejemplo:

$$(x^2 - 3a^3 + y) \cdot (x - 4a^2)$$
$$= (x^2 \cdot x + x^2 \cdot -4a^2) + (-3a^3 \cdot x - 3a^3 \cdot -4a^2) + (y \cdot x + y \cdot -4a)$$
$$= x^3 - 4x^2a^2 - 3a^3x + 12a^5 + yx - 4ya$$

FACTORIZAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

La factorización consiste en descomponer una expresión algebraica en los factores que la originaron. Uno de los más comunes es el **factor común** y corresponde al producto solo de los factores (numéricos y literales) repetidos en todos los términos, elevado cada uno al menor exponente que tengan.

Por ejemplo:

$$4xy^2 + 6x^2y - 10xy = 2xy \cdot (2y + 3x - 5)$$

PRODUCTOS NOTABLES

- **Cuadrado de binomio**:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- **Suma por su diferencia**:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

- **Binomios con termino común**:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + (a \cdot b)$$
$$(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - (a \cdot b)$$

- **Cubo de binomio**:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

- **Simplificación:** Se deben factorizar el numerador y denominador, para luego simplificar.

  Ejemplo:

$$\frac{x^2+7x+12}{x^2-16}=\frac{(x+4)(x+3)}{(x+4)(x-4)}=\frac{(x+3)}{(x-4)}$$

- **Adición y Substracción:** Primero se debe simplificar y encontrar los M.C.M entre los números que se están sumando o restando.

  Ejemplo:

$$\frac{x+3}{x^2-9}+\frac{2x}{x-3}=\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}+\frac{2x}{(x-3)}=\frac{(x+3)+2x\cdot(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$

- **Multiplicación y División:** Se debe buscar simplificar las expresiones y luego operar.

  Ejemplo:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}\cdot\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{a\cdot(a-b)}\cdot\frac{a^3}{(a+b)^2}=\frac{a^2}{(a+b)}$$

PROPORCIONALIDAD

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dos variables son directamente proporcionales cuando ocurre lo siguiente:

- Si una variable aumenta, la otra también.
- Si una variable disminuye, la otra también.
- El cociente entre ellas corresponde a una constante.

PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dos variables son inversamente proporcionales cuando ocurre lo siguiente:

- Si una variable aumenta, la otra disminuye.
- Si una variable disminuye, la otra aumenta.
- El producto de las variables corresponde a una constante.

ECUACIONES E INECUACIONES

DEFINICIONES

- **Ecuación de Primer Grado:** Corresponde a la ecuación cuyo mayor grado de los términos que lo componen es igual a 1.
- **Soluciones o Raíces de una Ecuación:** Son todos aquellos valores posibles que pueden tomar las incógnitas, para que se cumpla la igualdad.
- **Conjunto Solución de una Ecuación:** Es el conjunto que se compone de las soluciones o raíces de una ecuación.

TIPOS DE SOLUCIONES

- **Solución Única:** Sea la ecuación $ax = b, si\ a \neq 0$, la ecuación tendrá solución única en el conjunto de los reales.

- **Sin Solución:** El conjunto solución de la ecuación corresponde al conjunto vacío. Sea la ecuación $ax = b, si\ a = 0\ y\ b \neq 0$, entonces no existe ningún valor de x que haga cumplir la igualdad, por lo tanto, no hay solución.

¿Cómo se resuelve una ecuación de Primer Grado?

- Se identifica la variable a despejar.
- Se aplican los opuestos y recíprocos a ambos lados de la igualdad por medio de sumas, restas, multiplicaciones o divisiones.

Ejemplo:

$$10x + 30 = 4x$$

$$10x - 4x + 30 = 4x - 4x$$

$$6x + 30 = 0$$

$$6x + 30 - 30 = 0 - 30$$

$$6x = -30$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{-30}{6}$$

$$\boldsymbol{x = -5}$$

DESIGUALDADES

Corresponde a una relación a través de un signo que indica que un elemento es mayor, menor, mayor igual, o menor igual que otro ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$).

PROPIEDADES

- Si a, b, c son números reales y $a < b$, entonces: $\boldsymbol{a + c < b + c}$
- Si a, b, c son números reales y $a < b$ y $c > 0$, entonces: $\boldsymbol{ac < bc}$
- Si a, b, c son números reales y $a < b$ y $c < 0$, entonces: $\boldsymbol{ac > bc}$
- Si $0 < a < b$ ó $a < b < 0$, entonces: $\boldsymbol{\frac{1}{a} > \frac{1}{b}}$

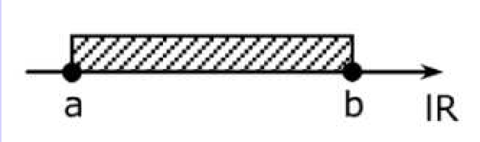
INTERVALOS

Un intervalo es un trozo de la recta numérica, está definido por desigualdades y se representan con paréntesis cuadrados: [ ].

- **Intervalo Cerrado**

Desde a hasta b (incluyendo ambos).

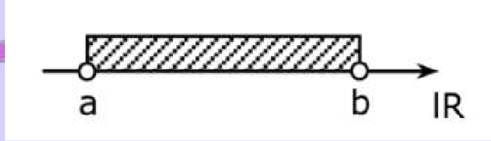
$x \in [a, b] = a \leq x \leq b$



- **Intervalo Abierto**

Entre a y b (no los incluye).

$x \in]a, b[= a < x < b$

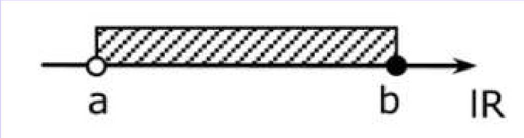


- **Intervalo Semicerrado**

$x \in [a, b[= a \leq x < b$

- **Intervalo Semiabierto**

$x \in]a, b] = a < x \leq b$



INECUACIONES

Corresponden a desigualdades formadas por expresiones algebraicas, en donde existe un término desconocido (incógnita). Las soluciones de las ecuaciones corresponden a intervalos.

IMPORTANTE

Algunos de los típicos problemas de planteamiento contienen las siguientes frases:

- "a lo menos": $x \geq a$
- "cuando mucho": $x \leq a$
- "como mínimo": $x \geq a$
- "como máximo": $x \leq a$
- "sobrepasa": $x > a$
- "no alcanza": $x < a$
- "a lo más": $x \leq a$

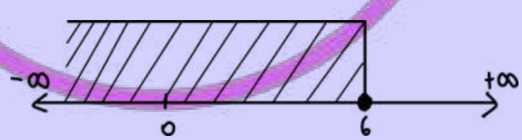
Ejemplo:

$$4x + 8 \leq 32$$

$$4x \leq 24$$

$$x \leq 6$$

$$x \in]-\infty, 6]$$



SISTEMAS DE ECUACIONES

Dos ecuaciones de primer grado, que tienen las mismas dos incógnitas, conforman un sistema de ecuaciones lineales. La forma general es:

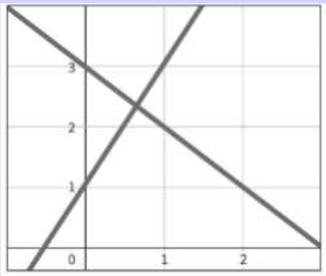
Se denomina solución del sistema a todo par ordenado (x, y) que satisfaga simultáneamente a ambas ecuaciones.

$$\begin{aligned} Ax + By &= C \\ Dx + Ey &= F \end{aligned}$$

ANÁLISIS DE SOLUCIONES

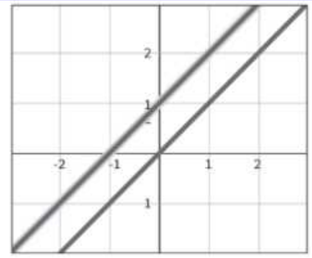
El sistema tiene solución única si:

$$\frac{A}{D} \neq \frac{B}{E}$$



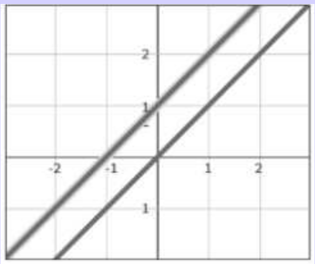
El sistema tiene infinitas soluciones:

$$\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F}$$



El sistema no tiene solución si:

$$\frac{A}{D} = \frac{B}{E} \neq \frac{C}{F}$$



RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES 2X2

- **Método de Sustitución:** Se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones y luego reemplazarla en la otra ecuación, generándose así una ecuación con una incógnita.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 32 \\ 6x + 10y = 34 \end{array}\right|$$

1. Despejamos y en la primera ecuación:

$$2y = 32 - 4x$$

$$y = 16 - 2x$$

2. Reemplazamos la expresión en la otra ecuación:

$$6x + 10(16 - 2x) = 34$$

$$6x + 160 - 20x = 34$$

$$-14x = 34 - 160$$

$$-14x = -126$$

$$\boldsymbol{x = 9}$$

3. Reemplazamos en el valor encontrado de x del primer paso:

$$y = 16 - 2(9)$$

$$y = 16 - 18$$

$$\boldsymbol{y = -2}$$

- **Método de Igualación:** Se debe despejar la misma variable en ambas ecuaciones y luego estos resultados se igualan, generándose así una ecuación con una incógnita.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 32 \\ 6x + 10y = 34 \end{array}\right|$$

1. Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$4x + 2y = 32$$

$$x = 8 - \frac{y}{2}$$

$$6x + 10y = 34$$

$$x = \frac{17 - 5y}{3}$$

2. Igualamos ambas expresiones y resolvemos:

$$\frac{17 - 5y}{3} = 8 - \frac{y}{2}$$

$$6 \cdot \frac{17 - 5y}{3} = 6 \cdot (8 - \frac{y}{2})$$

$$34 - 10y = 48 - 3y$$

$$\boldsymbol{y = -2}$$

3. Reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones obtenidas al inicio:

$$x = 8 - \frac{-2}{2}$$

$$\boldsymbol{x = 9}$$

- **Método de Reducción:** Se deben igualar los coeficientes de una de las incógnitas, en ambas ecuaciones, multiplicando ambos miembros convenientemente, luego se restan ambas ecuaciones, resultado así una ecuación con una incógnita.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 32 \\ 6x + 10y = 34 \end{array}\right|$$

1. Multiplicamos por 5 la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} 20x + 10y = 160 \\ 6x + 10y = 34 \end{array}\right|$$

2. Restamos ambas ecuaciones:

$$20x + 10y - (6x + 10y) = 160 - (34)$$

$$14x = 126$$

$$\boldsymbol{x = 9}$$

3. Reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$6 \cdot (9) + 10y = 34$$

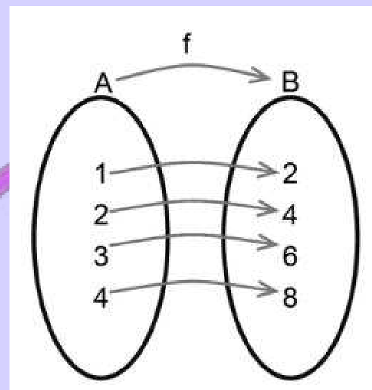
$$\boldsymbol{y = -2}$$

Notamos que con tres métodos diferentes llegamos al mismo resultado.

FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN

GENERALIDADES

Una función es una herramienta de la matemática a la cual le entregamos un elemento x de un conjunto A y nos retorna un elemento y de otro conjunto B a través de una función $f: A \rightarrow B$. Se tiene una función $y = f(x)$:



Dominio: Es el conjunto de todos los valores (A) para los cuales está definida la función. Se denota **Dom f**. (Conjunto de las pre-imágenes).

Codominio: Es el conjunto al cual pertenecen los valores posibles de f(x). Se denota **Codom f**. o conjunto de llegada (B).

Recorrido: Es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente (y). Se denota **Rec f**. (Conjunto de las imágenes).

- La variable **x** se denomina **variable independiente**
- La variable **y** se denomina **variable dependiente**.
- El recorrido y el codominio **no siempre son iguales**.

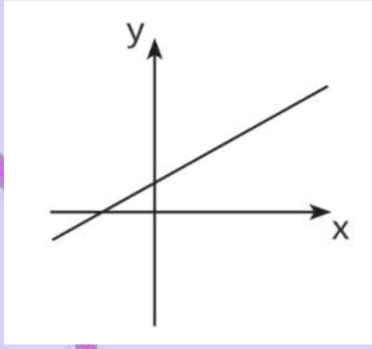
FUNCIONES EN EL PLANO CARTESIANO

Pueden ser representadas gráficamente en el plano cartesiano.

El plano cartesiano se conforma de dos ejes:

- El eje (Y) vertical o de las **ordenadas**, donde están los valores de $f(x)$
- El eje horizontal (X) o de las **abscisas**, donde están los valores de x.

FUNCIÓN LINEAL



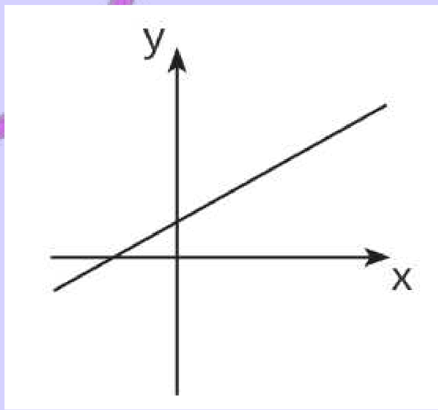
Corresponde a un tipo particular de una función que pasa por el origen $(0,0)$.

$$f(x) = mx, \qquad con\, m \neq 0\ \ y\ \in\ \mathbb{R}$$

Donde m es la pendiente de la función, tal que:

- Si $\boldsymbol{m > 0}$, entonces la función es **creciente**.
- Si $\boldsymbol{m < 0}$, entonces la función es **decreciente**.

FUNCIÓN AFÍN



Corresponde a un tipo particular de función que no pasa por el origen.

$$\boldsymbol{f(x) = mx + n}$$

$$con\ m, n \in\ \mathbb{R}\ y\ distintos\ de\ 0$$

Donde m es la **pendiente** de la función, y n es el **coeficiente de posición** (corte en el eje y).

De esta forma, la recta cortara al eje y en el punto $(0, n)$ y para conocer el corte en el eje x se debe igualar la función a 0: $mx + n = 0$.

¿Cómo podemos obtener la expresión de la función de la recta?

- Recta que pasa por un punto:

  Sea el punto (x_1, y_1) y la pendiente dada m. La fórmula de la recta será:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

- Recta que pasa por dos puntos:

  Sean los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

  1. Calculamos el valor de la pendiente de la formula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

  2. Reemplazamos el valor de m en la formula inicial

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

- Recta que corta ambos ejes:

  Sea $(a, 0)$ el corte en el eje x y $(0, b)$ el corte en el eje y, con a, b distintos de 0. La formula de la recta será:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ejemplo: Escriba la fórmula de la recta que pasa por los puntos $(2,1)$ y $(4,9)$

- Definimos $(x_1, y_1) = (2,1)\ y\ (x_2, y_2) = (4,9)$

- Calculamos la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 1}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4$$

- Reemplazamos en la ecuación:

$$(y - 1) = 4(x - 2)$$

$$y - 1 = 4x - 8$$

$$y = 4x - 7$$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Corresponde a la ecuación cuyo mayor grado de los términos que lo componen es igual a 2, y se escriben como:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad con\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$$

Las ecuaciones de segundo grado poseen como máximo dos soluciones reales y distintas.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- **Factorización:** Se debe factorizar la expresión como $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Las soluciones de la ecuación serán x_1 y x_2.

  Ejemplo:

  $$x^2 - 5x + 6 = 0$$

  $$(x - 3)(x - 2) = 0$$

  $$(x - 3) = 0 \qquad (x - 2) = 0$$

  $$\boldsymbol{x_1 = 3} \quad ; \quad \boldsymbol{x_2 = 2}$$

- **Complementando Cuadrados:** Se debe reescribir la ecuación de segundo grado de modo que quede escrita de la forma:

  $$(x - h)^2 + k = 0$$

  Luego despejar x:

  $$x = k \pm \sqrt{h}$$

Ejemplo:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x^2 + 2x \cdot 3 + 5 = 0$$

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 + 5 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 4 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 4 \ /\sqrt{\ }$$

$$(x + 3) = \pm 2$$

$$x = -3 \pm 2$$

$$\boldsymbol{x_1 = -3 + 2 = -1} \qquad \boldsymbol{x_2 = -3 - 2 = -5}$$

- **Formula General:** (se recomienda utilizar solo cuando no es posible factorizar o completar el cuadrado).

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ejemplo:

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$a = 3, \qquad b = -1, \qquad c = -2$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6}$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{1 + 5}{6} = 1} \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{1 - 5}{6} = -\frac{2}{3}}$$

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES

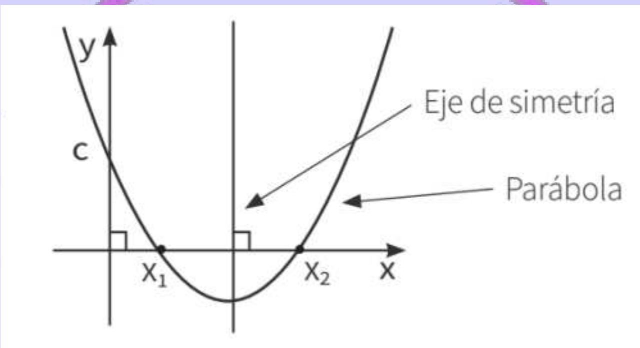
Sean x_1 y x_2 soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, entonces siempre se cumplen las siguientes propiedades:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \qquad \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Corresponde a un tipo de función de segundo grado que se escribe de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \qquad con\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$$



La representación gráfica de la función cuadrática es llamada parábola, y su forma depende de a, ya que:

- Si $a > 0$, entonces la parábola es **convexa** (se abre hacia arriba ⋃).

- Si $a < 0$, entonces la parábola es **cóncava** (se abre hacia abajo ⋂).

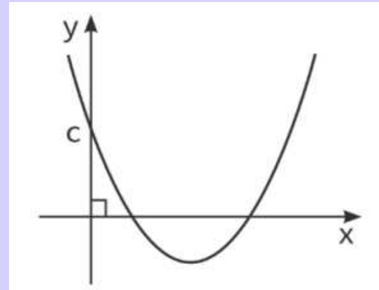
DOMINIO Y RECORRIDO

- **Dominio:** Corresponde al conjunto de los números reales.
- **Recorrido:** Dependerá de si la función es cóncava o convexa.
  Sea (x, y) el punto máximo o mínimo de la parábola, entonces el recorrido será:

$$Rec(f) = [y, +\infty[, \qquad si\ es\ convexa$$

$$Rec(f) =]-\infty, y], \qquad si\ es\ cóncava$$

INTERSECCIÓN CON EL EJE Y



Notamos que una parábola siempre intersectará en un solo punto al eje de las ordenadas. Para encontrar este punto, calculamos $f(0)$:

$$f(0) = a0^2 + b0 + c = c$$

Por lo que, **el corte en el eje Y es $(\mathbf{0}, \boldsymbol{c})$**

INTERSECCIÓN CON EL EJE X

La parábola intersecta al eje de las abscisas en x_1 y x_2 , que corresponden a las soluciones de una ecuación de segundo grado, donde se iguala $f(x) = 0$. Por lo que, las coordenadas de intersección con el eje x son: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

DISCRIMINANTE

El discriminante definido como $\Delta = b^2 - 4ac$,permite conocer la naturaleza de las soluciones de la ecuación cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

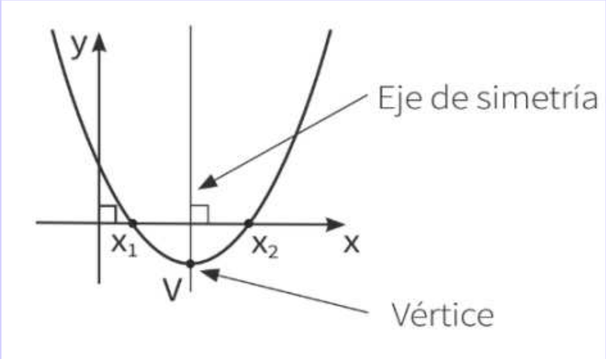
- Si $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$, la parábola **intersecta al eje x en dos puntos** (tiene 2 soluciones reales y distintas)

- Si $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$, la parábola **no intersecta al eje x** (no tiene soluciones reales).

- Si $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$, la parábola es **tangente al eje x** (tiene soluciones reales e iguales).

EJE DE SIMETRÍA Y VÉRTICE

Sea la función de segundo grado de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, cuyas soluciones son $x_1 \ y \ x_2$:



El **eje de simetría** de la parábola es una recta vertical que divide a esta en dos partes congruentes. Existen dos formas de calcular el eje de simetría:

$$\boldsymbol{X = \frac{-b}{2a}} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{X = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

El **vértice** de la parábola es el punto de intersección de esta con su eje de simetría.

$$\boldsymbol{V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)}$$

VARIACIONES EN LOS PARÁMETROS

Se tiene la función cuadrática $f(x) = (x + a)^2 + bx + c$

- Si $\boldsymbol{a > 0}$, la parábola se desplaza $\boldsymbol{a}$ **unidades a la izquierda**.
- Si $\boldsymbol{a < 0}$, la parábola se desplaza $\boldsymbol{a}$ **unidades a la derecha**.
- Si $\boldsymbol{c > 0}$, la parábola se desplaza $\boldsymbol{c}$ **unidades hacia arriba**.
- Si $\boldsymbol{c < 0}$, la parábola se desplaza $\boldsymbol{c}$ **unidades hacia abajo**.

GEOMETRÍA

ÁNGULOS

CONCEPTOS PRELIMINARES

- **Perímetro**: Corresponde a la suma del largo de los lados de una figura.
- **Área**: Corresponde al espacio que existe dentro de una figura geométrica.
- **Paralelo**: Corresponde a dos rectas que siguen una misma dirección y no se intersectan en ningún punto.
- **Perpendicular**: Corresponde a dos rectas que forman un ángulo recto.

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

POR MEDIDA

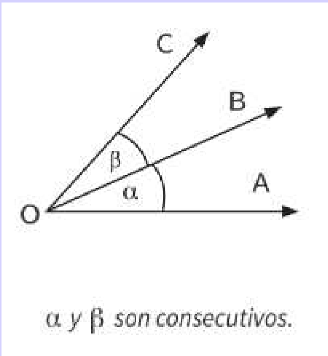
- **Ángulo agudo:** Mide más de 0° y menos de 90°.
- **Ángulo recto:** Es aquel que mide 90°.
- **Ángulo obtuso:** Es aquel que mide más de 90° y menos de 180°.
- **Ángulo extendido:** Corresponde al ángulo que mide 180°.

POR SUMA DE MEDIDAS

- **Ángulos complementarios:** Corresponden a los ángulos que juntos suman 90°.
- **Ángulos suplementarios:** Corresponden a los ángulos que juntos suman 180°.

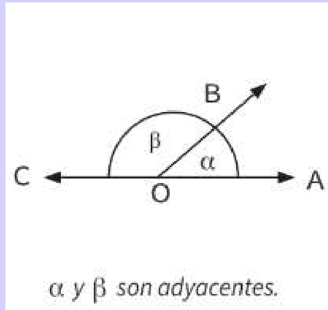
POR POSICIÓN

Ángulos Consecutivos



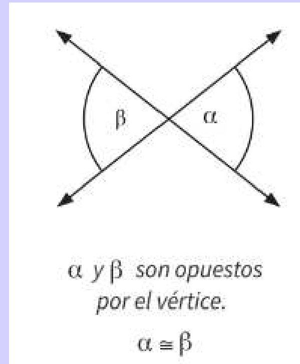
α y β son consecutivos.

Ángulos Adyacentes



α y β son adyacentes.

Ángulos Opuestos por el Vértice

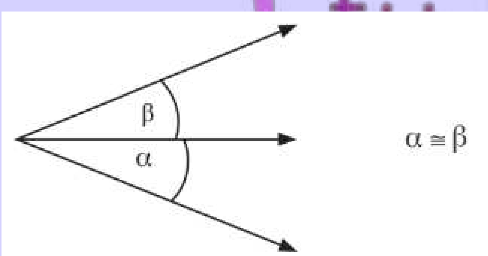


α y β son opuestos por el vértice.

$\alpha \cong \beta$

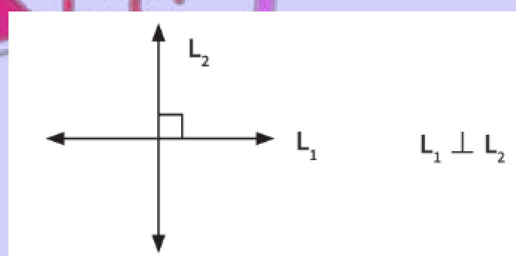
Bisectriz de un Ángulo

Rayo que divide al ángulo en dos de igual medida (congruentes).

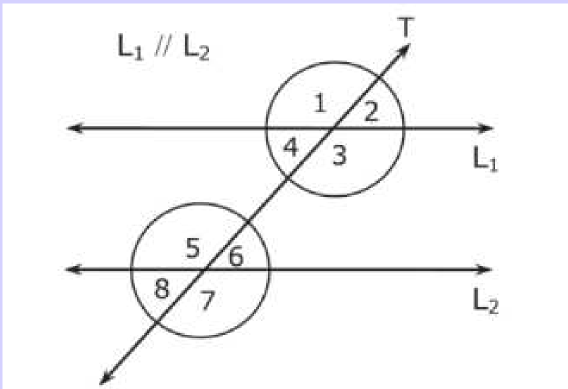


Rectas Perpendiculares

Son dos rectas que al cortarse forman un ángulo recto.



ÁNGULOS FORMADOS POR RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL



Ángulos Correspondientes

$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 5$

$\measuredangle 2 \cong \measuredangle 6$

$\measuredangle 3 \cong \measuredangle 7$

$\measuredangle 4 \cong \measuredangle 8$

Ángulos Internos

$\measuredangle 4 \cong \measuredangle 6$

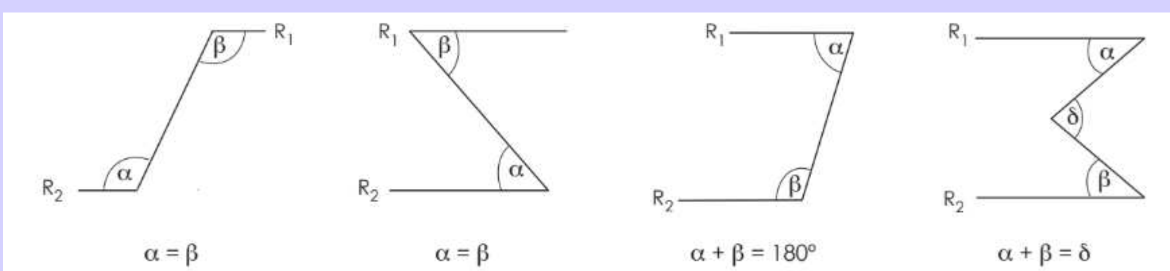
$\measuredangle 3 \cong \measuredangle 5$

Ángulos Externos

$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 7$

$\measuredangle 2 \cong \measuredangle 8$

CASOS FRECUENTES $(R1//R2)$



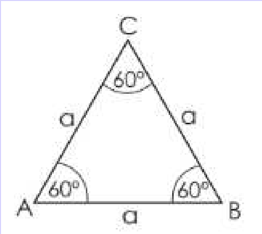
FIGURAS GEOMÉTRICAS

TRIÁNGULO

Figura de 3 lados y 3 vértices. La suma de sus ángulos interiores es 180°.

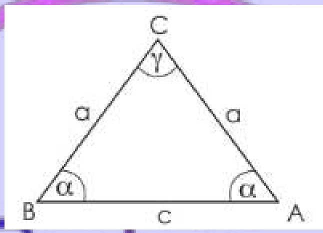
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS SEGÚN SUS LADOS

Triangulo Equilátero



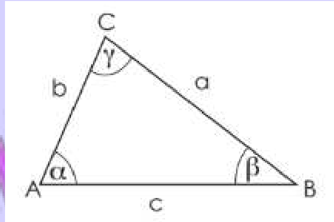
Tiene sus tres lados y sus tres ángulos de igual medida.

Triángulo Isósceles



Tiene dos lados y dos ángulos de igual medida. El lado distinto se llama base.

Triángulo Escaleno

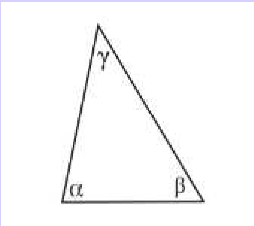


Tiene sus tres lados y sus tres ángulos de distinta medida.

CLASIFICACIÓN SEGÚN MEDIDA DE SUS ÁNGULOS

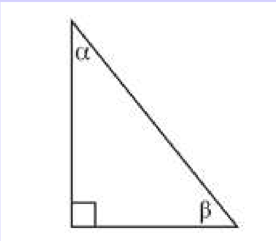
Acutángulo

Tiene sus tres ángulos agudos.



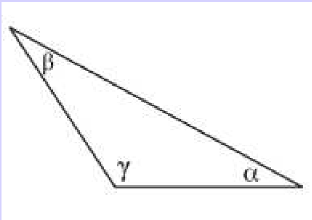
Rectángulo

Tiene un ángulo recto.



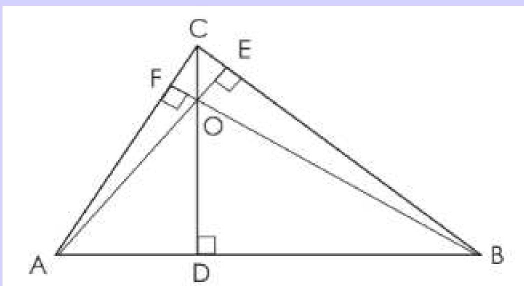
Obtusángulo

Tiene un ángulo obtuso.



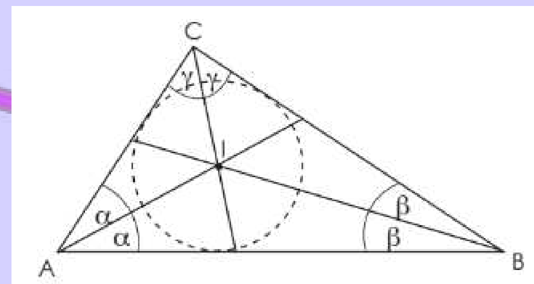
ELEMENTOS SECUNDARIOS DEL TRIÁNGULO

- **Altura:** Es el segmento que va desde un vértice al lado opuesto o a la prolongación de este en forma perpendicular.
  El punto de intersección de las alturas se llama **ortocentro**.

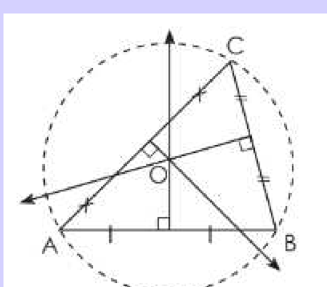


- **Bisectriz:** Es el rayo que divide a cada ángulo interior en dos ángulos congruentes.

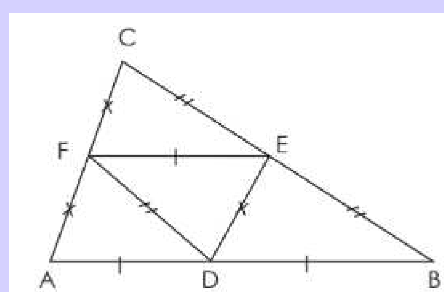
  I: punto de intersección de bisectrices, llamado **incentro**.



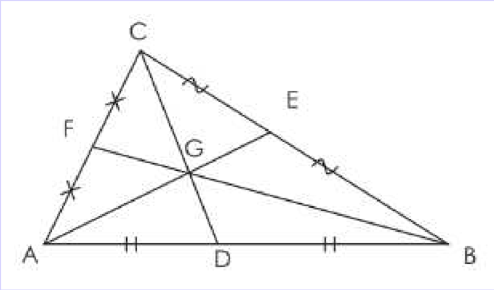
- **Simetral:** Es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado del triángulo.
  O es el punto de intersección de las simetrales y se denomina **circuncentro**.



- **Mediana:** Es el segmento que une los puntos medios de los lados del triángulo. Las medianas dividen al triángulo en cuatro triángulos congruentes.



- **Transversal de gravedad:** Es el segmento que une un vértice con el punto medio de su lado opuesto. El punto de intersección de las transversales de gravedad se denomina **centro de gravedad**.



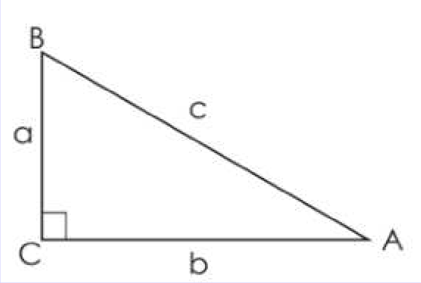
Propiedades

- El centro de gravedad divide a cada transversal en la razón 2:1
- Las tres transversales dividen al triangulo en seis triángulos equivalentes (igual área).
- En todo triangulo, cada transversal de gravedad lo divide en dos triángulos equivalentes (igual área).

TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo, se cumple que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos es igual al área del cuadrado construido sobre su hipotenusa.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



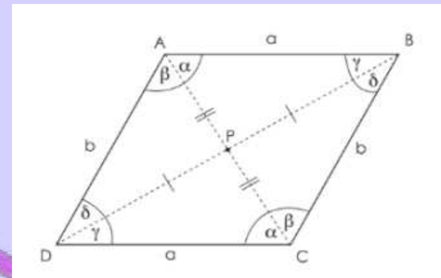
Tríos pitagóricos conocidos

Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa
3	4	5
5	12	13
8	15	17

CUADRILÁTEROS

Son cualquier polígono de cuatro lados, la suma de sus ángulos interiores es 360°, y se clasifican en: Paralelogramos (2 pares de lados paralelos), Trapecios (1 par de lados paralelos), y Trapezoides (0 pares de lados paralelos).

PARALELOGRAMOS



- Los ángulos opuestos son congruentes.

$$\sphericalangle \boldsymbol{A} = \sphericalangle \boldsymbol{C} \ ; \ \sphericalangle \boldsymbol{B} = \sphericalangle \boldsymbol{D}$$

- Los ángulos consecutivos son suplementarios.

$$\sphericalangle \boldsymbol{A} + \sphericalangle \boldsymbol{B} = \sphericalangle \boldsymbol{B} + \sphericalangle \boldsymbol{C} = \mathbf{180}^\circ$$

- Los lados opuestos son congruentes.

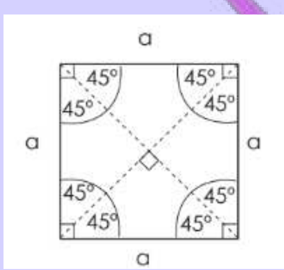
$$\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{CD}} \ ; \ \overline{\boldsymbol{AD}} = \overline{\boldsymbol{BC}}$$

- Las diagonales de un paralelogramo se dimidian.

$$\overline{\boldsymbol{AP}} = \overline{\boldsymbol{PC}} \ ; \ \overline{\boldsymbol{BP}} = \overline{\boldsymbol{PD}}$$

- Las diagonales lo dividen en 4 triángulos de igual área.

I. Cuadrado



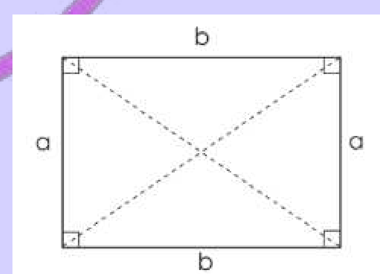
Características:

- Diagonales perpendiculares
- Diagonales bisectrices
- Diagonales congruentes

Perímetro: $4 \cdot a$

Área: a^2 ó $\frac{(Diagonal)^2}{2}$

II. Rectángulo



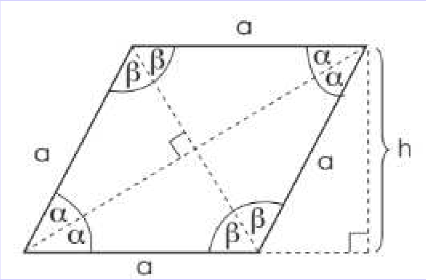
Características:

- Diagonales de igual medida

Perímetro: $2a + 2b$

Área: $a \cdot b$

III. **Rombo**



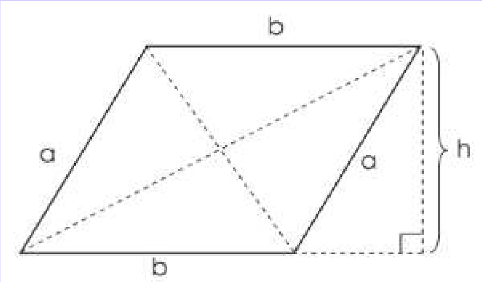
Características:

- Diagonales perpendiculares
- Diagonales bisectrices

Perímetro: $4 \cdot a$

Área: $a \cdot h$ ó $\frac{(Diag\ 1 \cdot Diag\ 2)}{2}$

IV. **Romboide**



Características:

- Solo las comunes de un paralelógramo

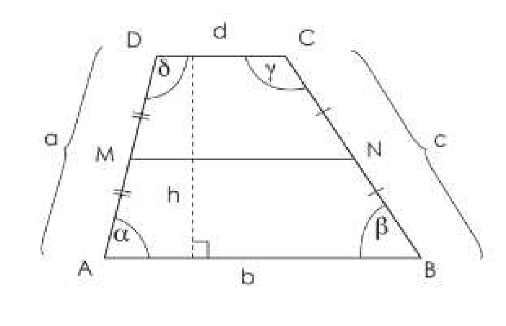
Perímetro: $2a + 2b$

Área: $b \cdot h$

TRAPECIOS

- Es aquel cuadrilátero que tiene solo un par de lados paralelos, llamados bases.
- La medida de la mediana corresponde al promedio de las bases.

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$



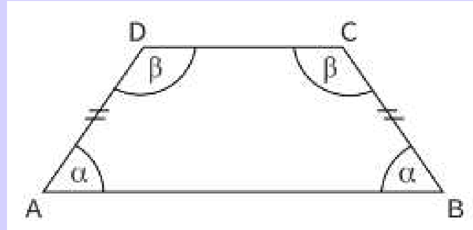
- **Perímetro**: $a + b + c + d$
- **Área**: $\overline{MN} \cdot h$
- Sus ángulos colaterales internos entre las bases son suplementarios, es decir:

$$\alpha + \delta = 180° \ ; \ \beta + \gamma = 180°$$

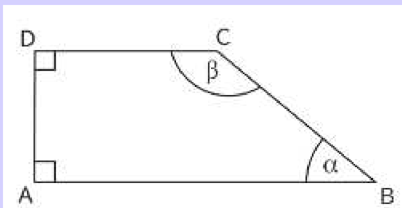
- La mediana ($\overline{MN}$) es la unión de los puntos medios de los lados no paralelos. Esta es paralela a las bases.

TRAPECIO ISÓSCELES

- Lados no basales son congruentes
- Ángulos basales congruentes
- Diagonales congruentes
- Ángulos opuestos suplementarios

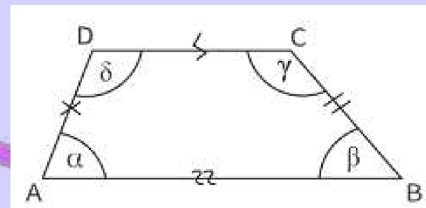


Trapecio Rectángulo



Uno de sus lados no basal es perpendicular a las bases.

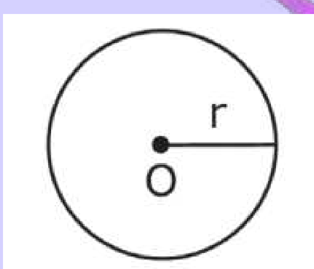
Trapecio Escaleno



Sus ángulos y lados son de distinta medida

CIRCULO Y CIRCUNFERENCIA

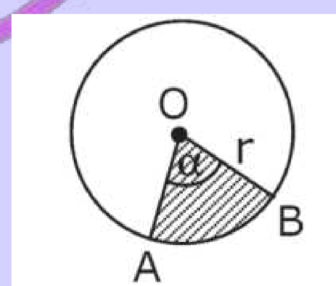
CÍRCULO



Perímetro: $2\pi r$

Área: πr^2

SEGMENTO CIRCULAR



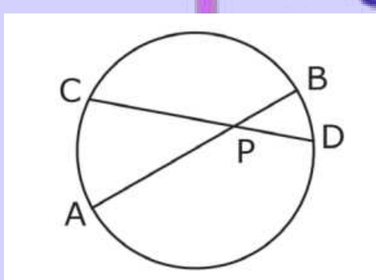
Perímetro: $\frac{\alpha \cdot 2\pi r}{360°} + 2r$

Área: $\frac{\alpha \cdot \pi r^2}{360°}$

ELEMENTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

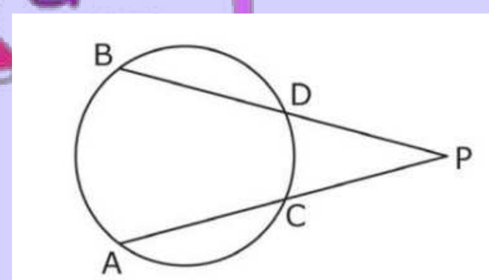
- **Radio**: trazo cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de esta $(\overline{OA})$.
- **Cuerda**: Trazo cuyos extremos son dos puntos de una circunferencia $(\overline{DE})$.
- **Diámetro**: Cuerda que contiene al centro de la circunferencia. Mide dos radios $(\overline{BC})$.
- **Secante**: Recta que intersecta en dos puntos a la circunferencia $(\overleftrightarrow{PQ})$.
- **Tangente**: Recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto $(\overleftrightarrow{TM}, siendo\ T\ punto\ de\ tangencia)$.
- **Arco**: Es una parte de la circunferencia determinada por dos puntos distintos de ella (arco CE).

TEOREMA DE LAS CUERDAS



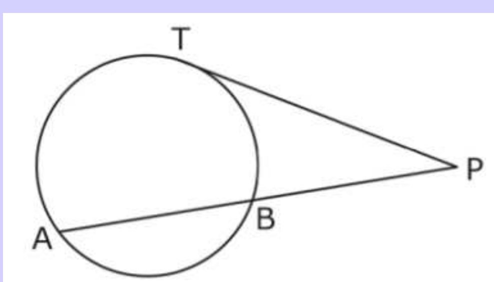
$$\mathbf{AP \cdot PB = CP \cdot PD}$$

TEOREMA DE LAS SECANTES



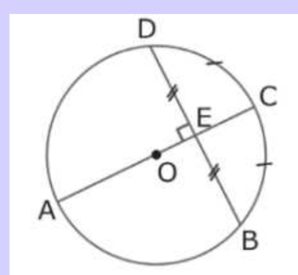
$$\mathbf{PA \cdot PC = PB \cdot PD}$$

TEOREMA DE LA SECANTE Y TANGENTE



$$\mathbf{PT^2 = PA \cdot PB}$$

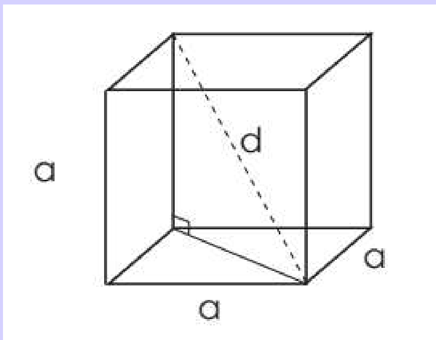
CASO PARTICULAR DEL TEOREMA DE CUERDAS



$$\mathbf{DE^2 = EB^2 = AE \cdot E}$$

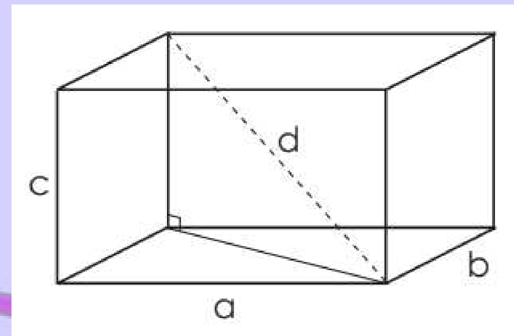
CUERPOS GEOMÉTRICOS

i. **Cubo**



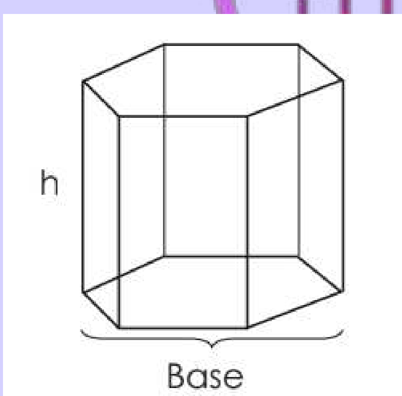
- Área: $6 \cdot a^2$
- Volumen: a^3
- Diagonal (d): $a \cdot \sqrt{3}$

ii. **Paralelepípedo**



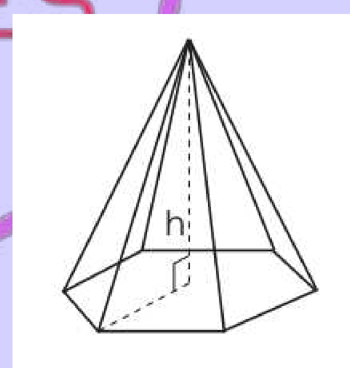
- Área: $2 \cdot (ab + bc + ac)$
- Volumen: $a \cdot b \cdot c$
- Diagonal: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

iii. **Prisma**



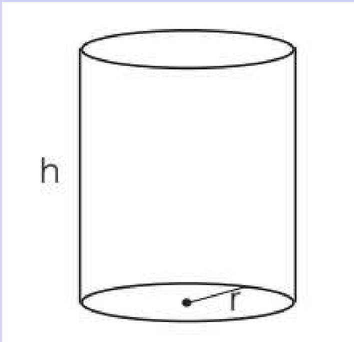
- Área: $\text{Áreas laterales} + \text{Áreas basales}$
- Volumen: $\text{Área basal} \cdot \text{h}$

iv. **Pirámides**



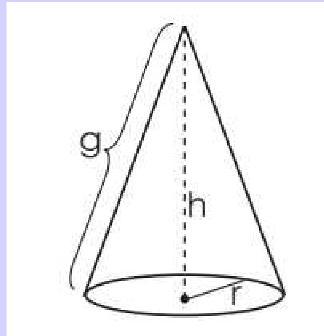
- Área: $\text{Áreas laterales} + \text{Áreas basales}$
- Volumen: $\frac{1}{3} \cdot \text{Área basal} \cdot \text{h}$

v. Cilindros



- Área: $2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
- Volumen: $\pi \cdot r^2 \cdot h$

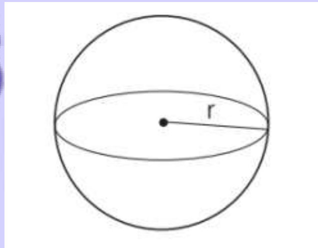
vi. Conos



- Generatriz: $g = \sqrt{(r)^2 + (h)^2}$
- Área: $\pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$
- Volumen: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

vii. Esferas

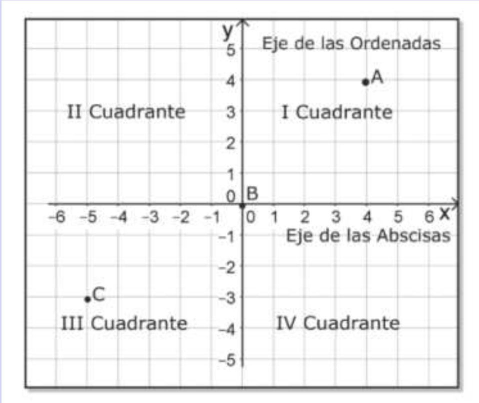
- Área: $4 \cdot \pi \cdot r^2$
- Volumen: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$



TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Sistema Cartesiano

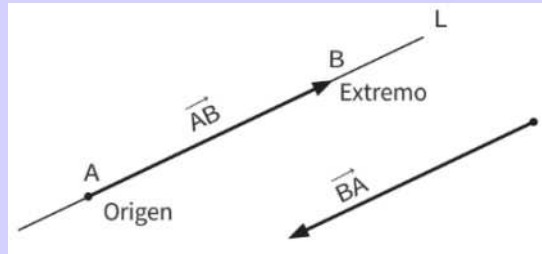
Para determinar la posición de los puntos de un plano usando coordenadas cartesianas rectangulares, se emplean dos rectas perpendiculares (ortogonales) y el punto de intersección entre ellas se considera como origen.



- **Punto Medio:** $\left(\frac{(x_1+x_2)}{2}, \frac{(y_1+y_2)}{2}\right)$

VECTORES

Corresponde a un segmento de recta dirigido AB caracterizado por tener:



- **Módulo**: Es la longitud del segmento AB y se denota $\overrightarrow{AB}$. Su valor es siempre mayor o igual a cero.
- **Dirección**: Esta dada por la pendiente u orientación de la recta que contiene al vector (recta L).
- **Sentido**: Existen dos sentidos posibles, de A hacia B o de B hacia A, indicados por la flecha $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{BA}$, respectivamente.

OPERACIONES CON VECTORES

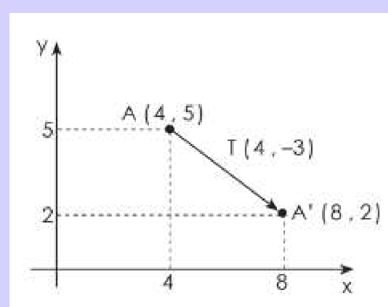
Dado los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$:

- **Adición y Substracción:** $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2)$
- **Ponderación:** $k \cdot \vec{a} = k \cdot (a_1, a_2) = (k \cdot a_1,\ k \cdot a_2)$
- **Módulo o Magnitud:** $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$

ISOMETRÍAS

TRASLACIONES

Son aquellas isometrías que permiten desplazar en línea recta todos los puntos del plano, mediante un vector de traslación. Para obtener la posición de un punto trasladado en el plano cartesiano, se debe sumar las coordenadas del punto inicial mas las coordenadas del vector traslación.



$$A(4{,}5) + T(4, -3) = A'(8{,}2)$$

- Al realizar una traslación, la figura **JAMAS** se rota.

ROTACIONES

Son aquellas isometrías que permiten girar todos los puntos del plano. Para rotar un punto, se necesita un centro de rotación (punto en torno al cual se gira), y un ángulo de rotación (indica cuanto se gira).

Rotaciones en torno al origen:

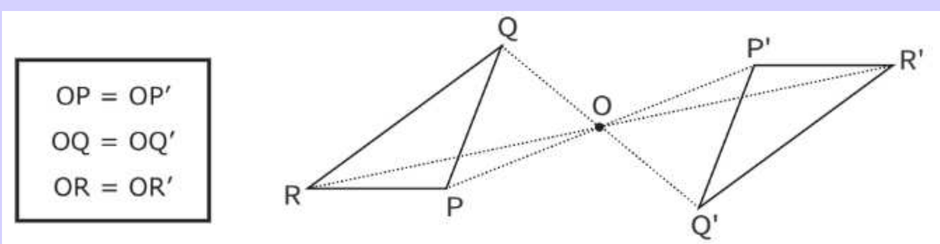
Inicial	90º	180º	270º	360º
(x , y)	(–y , x)	(–x , –y)	(y , –x)	(x , y)

- Si el centro de rotación no es el origen, se debe trasladar el vector al origen, realizar la rotación y luego devolverlo a su posición inicial.

SIMETRÍA CENTRAL

En esta, un punto o figura es reflejado con respecto a otro punto llamado centro de simetría. Además, se cumple que:

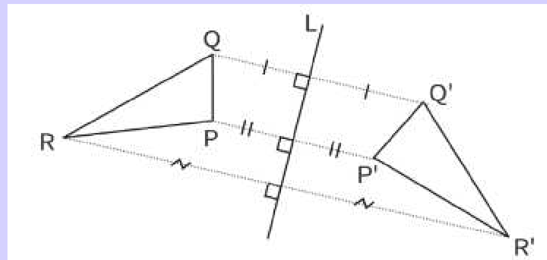
- Los trazos de la figura original son paralelos a los trazos homólogos de la figura transformada.
- Los puntos homólogos están a la misma distancia del centro de simetría.
- Una simetría respecto de un punto O equivale a una rotación en 180° de centro O.
- Todo punto del plano cartesiano (x, y) tiene su simétrico con respecto al origen al punto (-x, -y).



La figura muestra un triángulo simétrico con respecto a O

SIMETRÍA AXIAL

En esta, un punto o una figura es reflejada con respecto a una recta, llamada eje de simetría, formando un efecto espejo. Además, se cumple que:

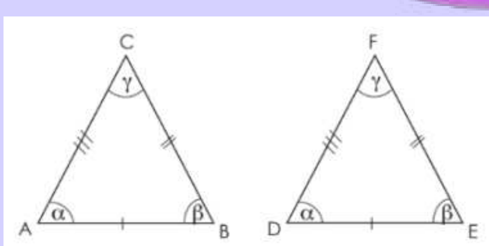


- Los puntos homólogos quedaran a la misma distancia del eje de simetría.
- El segmento que une los puntos homólogos es perpendicular al eje de simetría.
- Todo punto del plano cartesiano A(x,y) tiene un simétrico A´(x, -y) con respecto al eje de las abscisas (eje X), y un simétrico A´´(-x, y) con respecto al eje de las ordenadas (eje Y).

SEMEJANZA Y PROPORCIONALIDAD DE FIGURAS PLANAS

CONGRUENCIA

Dos o más figuras son congruentes (≅) si se cumple que son exactamente iguales tanto en forma como en tamaño.

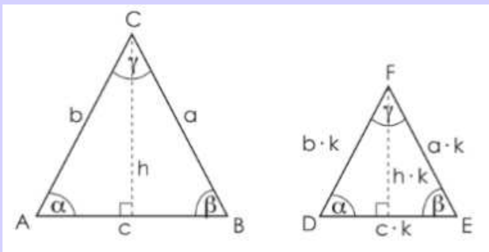


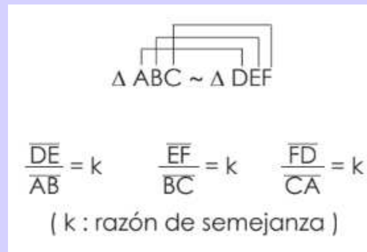
$$\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$$

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

SEMEJANZA

Dos o más figuras son semejantes (~) si tienen igual forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Sus ángulos respectivos son congruentes y sus lados homólogos son proporcionales.





RAZÓN DE SEMEJANZA

- Los segmentos homólogos están en la misma razón (k) que sus perímetros y elementos secundarios. Es decir:

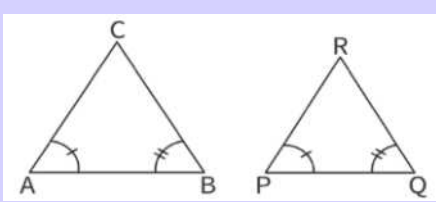
$$\frac{\boldsymbol{Perimetro\ \Delta DEF}}{\boldsymbol{Perimetro\ \Delta ABC}} = \frac{\boldsymbol{a \cdot k}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{b \cdot k}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c \cdot k}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{h \cdot k}}{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{k}$$

- Las áreas están en una razón equivalente al cuadrado de la razón (k^2).

$$\frac{\boldsymbol{\text{Á}rea\ \Delta DEF}}{\boldsymbol{\text{Á}rea\ \Delta ABC}} = \boldsymbol{k^2}$$

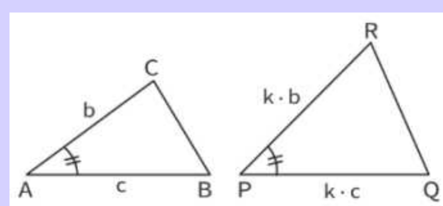
TEOREMAS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

- **AA:** Para que dos triángulos sean semejantes, basta que ambos tengan dos ángulos congruentes.



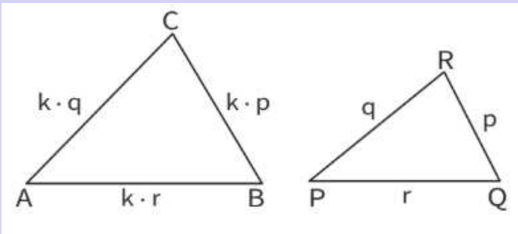
Si $\measuredangle A \cong \measuredangle P\ y\ \measuredangle B \cong \measuredangle Q$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

- **LAL:** Angulo congruente comprendido entre dos lados proporcionales.



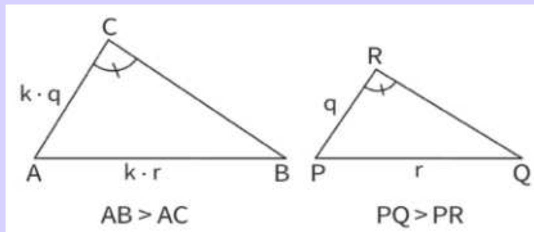
Si $\measuredangle A \cong \measuredangle P$ y $\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

- **LLL:** Lados proporcionales



Si $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

- **LLA:** Dos lagos proporcionales y ángulos opuestos a los mayores de estos lados, congruentes.



$AB > AC, \qquad PQ > PR$

Si $\measuredangle C \cong \measuredangle R$ y $\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

DIVISIÓN INTERIOR DE TROZOS

Un punto P perteneciente a un trazo AB lo divide interior mente en la razón $m\colon n$, si $AP\colon PB = m\colon n$.

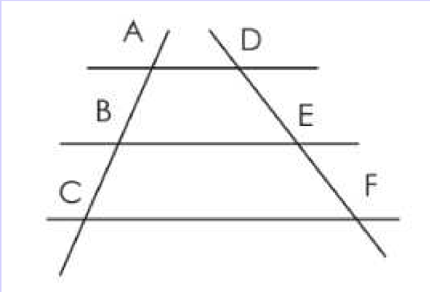
$$\boldsymbol{\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}}$$

TEOREMA DE THALES

- Caso 1:

Si se cumple: $\overline{AB} // \overline{BE} // \overline{CF}$

$$\frac{\overline{\boldsymbol{AB}}}{\overline{\boldsymbol{BC}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{DE}}}{\overline{\boldsymbol{EF}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{AC}}}{\overline{\boldsymbol{DF}}}$$

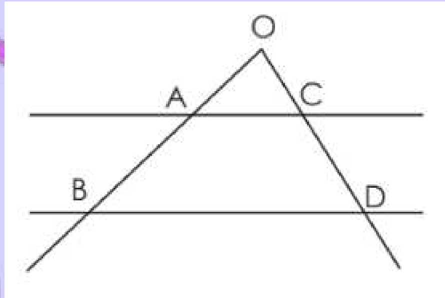


- Caso 2:

Si se cumple: $\overline{AC} // \overline{BD}$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$$

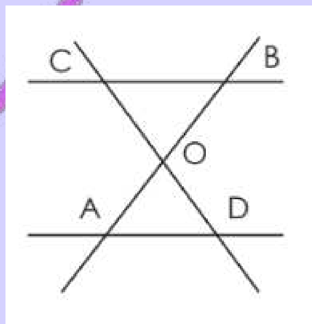
$$\frac{\overline{\boldsymbol{OA}}}{\overline{\boldsymbol{OB}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{OC}}}{\overline{\boldsymbol{OD}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{AC}}}{\overline{\boldsymbol{BD}}}$$



- Caso 3:

Si se cumple: $\overline{AD} // \overline{BC}$

$$\frac{\overline{\boldsymbol{CO}}}{\overline{\boldsymbol{OD}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{BO}}}{\overline{\boldsymbol{OA}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{BC}}}{\overline{\boldsymbol{AD}}}$$

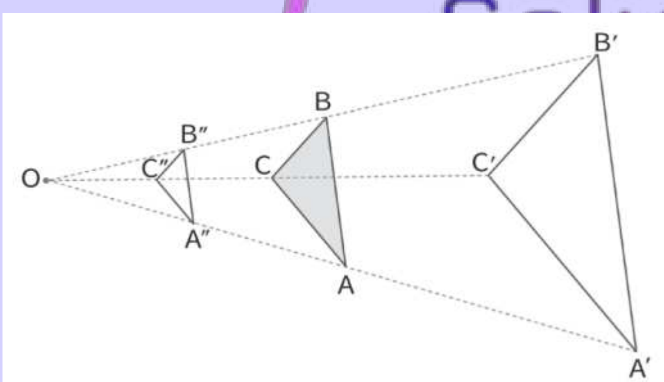


HOMOTECIA

Una homotecia consiste en una ampliación o reducción, resultando una figura semejante a la original.

- La razón de homotecia **k** en valor absoluto es: $\frac{\text{Lado de la Figura Homotética}}{\text{Lado de la Figura Original}}$
- Los segmentos homólogos son paralelos.
- Si $|\mathbf{k}| > \mathbf{1}$: la figura homotética se **amplifica**.
- Si $\mathbf{0} < |\mathbf{k}| < \mathbf{1}$: la figura homotética se **reduce**.
- Si $|\mathbf{k}| = \mathbf{1}$: la figura homotética es **congruente** a la figura original.

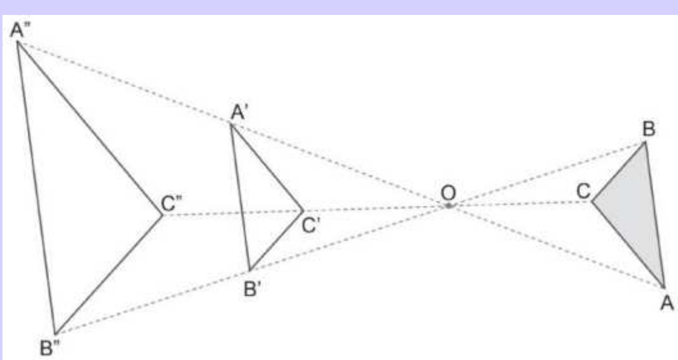
HOMOTECIA DIRECTA: Ocurre cuando los puntos homotéticos están al mismo lado del centro de homotecia.



$$\frac{\text{OA}'}{\text{OA}} = \frac{\text{OB}'}{\text{OB}} = \frac{\text{OC}'}{\text{OC}} = \text{k}$$

$$(\text{k} > 0)$$

HOMOTECIA INVERSA: Ocurre cuando los puntos están a distinto lado del centro de homotecia.



$$\frac{\text{OA}''}{\text{OA}} = \frac{\text{OB}''}{\text{OB}} = \frac{\text{OC}''}{\text{OC}} = \text{k}$$

$$(\text{k} < 0)$$

HOMOTECIA EN EL PLANO CARTESIANO

- **Con centro en el origen**: Si a un cuadrado de vértices $A(2,2)$ $B(6,2)$ $C(6,6)$ $D(2,6)$ con centro en el origen se le aplica una homotecia de razón $\boldsymbol{k} = -\mathbf{2}$, ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del cuadrado homotético?

$$-2 \cdot A(2,2) = A'(-4,-4)$$

$$-2 \cdot B(6,2) = B'(-12,-4)$$

$$-2 \cdot C(6,6) = C'(-12,-12)$$

$$-2 \cdot D(2,6) = D'(-4,-12)$$

- **Sin centro en el origen:** El procedimiento es similar, pero primero se traslada el vector al origen, luego se aplica la homotecia, y se devuelve el vector.
  Si a un cuadrado de vértices $A(2,2)$ $B(6,2)$ $C(6,6)$ $D(2,6)$ con centro de homotecia en $H(2,-1)$ se le aplica una homotecia de razón $\boldsymbol{k} = -\mathbf{2}$, ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del cuadrado homotético?
  Restamos $H(2,-1)$ a todos los puntos para devolverlos al origen:

$$A(2,2) - H(2,-1) = (0,3)$$

$$B(6,2) - H(2,-1) = (4,3)$$

$$C(6,6) - H(2,-1) = (4,7)$$

$$D(2,6) - H(2,-1) = (0,7)$$

Aplicamos la homotecia:

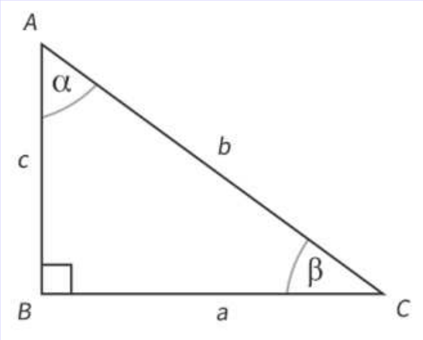
$$-2 \cdot (0,3) = A'(0,-6)$$
$$-2 \cdot (4,3) = B'(-8,-6)$$
$$-2 \cdot (4,7) = C'(-8,-14)$$
$$-2 \cdot (0,7) = D'(0,-14)$$

Devolvemos el punto:

$$A'(0,-6) + H(2,-1) = (2,-7)$$
$$B'(-8,-6) + H(2,-1) = (-6,-7)$$
$$C'(-8,-14) + H(2,-1) = (-6,-15)$$
$$D'(0,-14) + H(2,-1) = (2,-15)$$

RAZONES TRIGONOMETRICAS

Dado el siguiente triangulo rectángulo ΔABC de lados a, b, c y ángulos α, β.



Se definen las siguientes razones:

Seno de α $= \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\text{Cateto Opuesto de } \alpha}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{a}{b}$

Coseno de α $= \cos \alpha = \dfrac{\text{Cateto adyacente de } \alpha}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{c}{b}$

Tangente de α $= \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto de } \alpha}{\text{Cateto Adyacente de } \alpha} = \dfrac{a}{c}$

Razones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°:

Ángulo / Razón	30º	45º	60º
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

PROBABILIDAD

Y

ESTADÍSTICA

REPRESENTACIÓN DE DATOS

La estadística es un área de la matemática que se dedica a la recolección y análisis de datos para obtener conclusiones sobre el tópico que se está estudiando.

CONCEPTOS BÁSICOS

- **Población:** Es un conjunto cuyos elementos poseen una o más características comunes que se quiere estudiar, estas pueden ser finitas o infinitas.
- **Muestra:** Es cualquier subconjunto de una población, y para que un estudio estadístico sea válido, su muestra debe ser aleatoria y representativa.
- **Variable Cualitativa:** Son aquellas variables que no son medibles numéricamente, se clasifican en nominales (no tienen orden) y ordinales (se pueden jerarquizar).
- **Variable Cuantitativa:** Son aquellas variables en que cada observación es un resultado de una medición o un conteo, y por lo tanto tiene un valor expresado por un número real. Se clasifican en discretas (son numerables) y continuas (toman un valor de un intervalo).

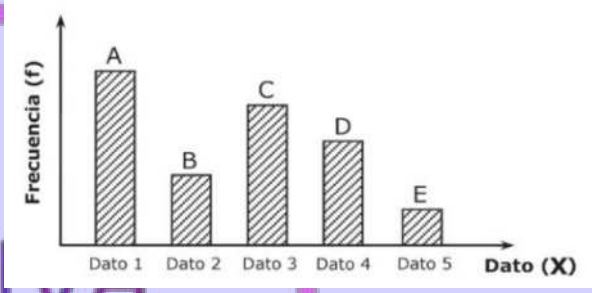
TABLA DE DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

- **Dato o Intervalo (X):** Información o variable que se estudia.
- **Marca de clase (c):** Se define como el promedio de los extremos de un intervalo.
- **Amplitud de un intervalo (a):** Es la diferencia entre su límite superior y límite inferior.
- **Frecuencia Absoluta (f):** Número de veces que se repite un dato.
- **Frecuencia Acumulada (F):** Suma de las frecuencias absolutas de todos los valores menores o iguales al valor considerado.

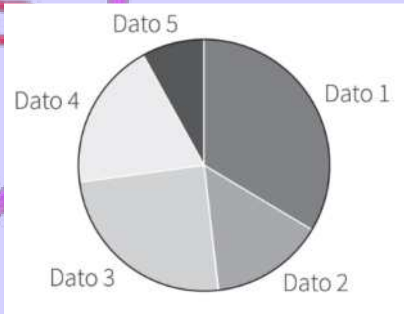
- **Frecuencia Relativa (f_r):** Es el cuociente entre la frecuencia absoluta de uno de los valores de la variable y el total de datos. Se puede representar como fracción, numero decimal o porcentaje.
- **Frecuencia Relativa Acumulada (F_r):** Es la que se obtiene sumando ordenadamente las frecuencias relativas hasta la que ocupa la última posición.
- **Rango:** Corresponde a la diferencia entre el dato más grande y el dato más pequeño.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA E INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS

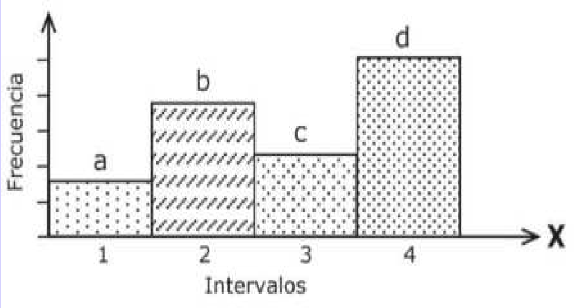
- **Gráfico de Barras:**
  Se utiliza para variables de tipo cualitativas y cuantitativas discretas.



- **Gráfico Circular:**
  Es utilizado en variables de tipo cualitativa y cuantitativa discreta, en donde el ángulo de los sectores circulares es proporcional a la frecuencia relativa de cada valor de la variable.



- **Histograma:**
  Se utiliza para representar a los datos agrupados en intervalos.



MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y RANGO

MEDIA ARITMÉTICA O PROMEDIO ($\overline{\mathrm{X}}$)

Es el cuociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos.

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} + \cdots + \mathbf{x_n}}{\mathbf{n}}$$

- **Para datos organizados en una tabla de frecuencias:** Es el cuociente entre la suma de todos los datos multiplicados por sus frecuencias, y dividido por la cantidad de datos.

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \cdots + x_n \cdot f_n}}{\mathbf{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}}$$

- **Para datos agrupados en intervalos:** Es el cuociente entre la suma de todas las frecuencias multiplicados por sus marcas de clase, y divido por la cantidad total de datos.

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + c_3 \cdot f_3 + \cdots + c_n \cdot f_n}}{\mathbf{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}}$$

MODA (Mo)

Es el dato o los datos que presentan la mayor frecuencia absoluta.

- Para datos agrupados en intervalos, se denomina **intervalo modal** y es el intervalo con la mayor frecuencia absoluta.
- La muestra puede ser **amodal** (si no hay un dato que tenga mayor frecuencia), **unimodal** (si existe un solo dato que tenga mayor frecuencia), o **bimodal** (si existen dos o más datos que tienen la misma frecuencia y es la mayor).

MEDIANA (Me)

Es el dato que ocupa la posición central de la muestra cuando estos se encuentran ordenados en forma creciente o decreciente.

Para datos agrupados en tabla de frecuencias:

Si el número de datos es impar, entonces la mediana es:

$$\mathbf{Me = X_{\frac{n+1}{2}}}$$

Si el número de datos es par:

$$\mathbf{Me = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}}$$

Para datos agrupados en intervalos:

La mediana se encuentra en el primer intervalo en que la frecuencia acumulada es mayor o igual a $\frac{n}{2}$.

MEDIDAS DE POSICIÓN

Las medidas de posición dividen a un conjunto de datos en partes iguales y sirven para clasificar a un individuo o elemento dentro de una determinada población o muestra, y se aplican a variables cuantitativas.

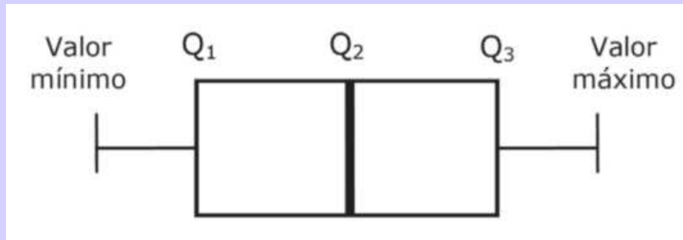
CUARTILES

Los cuartiles son tres valores que dividen los datos ordenados de menor a mayor en cuatro partes iguales. Estos son:

- Q_1: representa el 25% de los datos.
- Q_2: representa el 50% de los datos y siempre es la mediana.
- Q_3: representa el 75% de los datos.
- El **rango intercuartil** es $Q_3 - Q_1$

GRÁFICO DE CAJA Y BIGOTE

El diagrama de caja es una representación gráfica basada en los cuartiles, que ayuda a ilustrar una muestra de datos. Para elaborar este gráfico, solo se necesitan de: el valor mínimo, los cuartiles, y el valor máximo de la muestra.



- El largo de la caja es el **rango intercuartil**.

PERCENTILES

Los percentiles son 99 valores, que dividen los datos ordenados de menor a mayor en 100 partes iguales. Estos son valores bajos los cuales se acumula aproximadamente el 1%, 2%, 3%, … y el 99% de los datos estudiados.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión indican la dispersión de los datos de una muestra o población respecto a su valor central, salvo el rango. Además, mientras menor sea la medida de dispersión, más homogénea será la muestra.

RANGO

Para datos no agrupados es la diferencia entre el mayor y menor de los datos. Para datos agrupados en intervalos, el rango es la diferencia entre el límite superior del último intervalo y el límite inferior del primer intervalo.

DESVIACIÓN MEDIA

La desviación media de un conjunto de datos corresponde a la media aritmética de los valores absolutos de lo que se desvía cada valor respecto a la media aritmética.

x_n: Dato $\bar{x}$: Media de los datos

- **Para Datos No Agrupados:**

$$D_M = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

- **Para Datos Agrupados:**

$$D_M = \frac{|x_1 - \bar{x}| \cdot f_1 + |x_2 - \bar{x}| \cdot f_2 + \cdots + |x_n - \bar{x}| \cdot f_n}{n}$$

DESVIACIÓN ESTÁNDAR

Es una medida que indica que tan alejados están en promedio, los datos respecto de la media aritmética.

$\bar{x}$: Media, x: Dato, n: total de datos, f: frecuencia, c: marca de clase

- **Para Datos No Agrupados:**

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

- **Para Datos Agrupados en Tablas de Frecuencias:**

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 \cdot (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + f_n \cdot (x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}}$$

- **Para Datos Agrupados en Intervalos:**

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1 \cdot (c_1 - \bar{x})^2 + f_2 \cdot (c_2 - \bar{x})^2 + \cdots + f_n \cdot (c_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}}$$

VARIANZA

Es otra medida de dispersión que corresponde al cuadrado de la desviación estándar.

$\bar{x}$: Media, x: Dato, n: total de datos, f: frecuencia, c: marca de clase

- **Para Datos No Agrupados:**

$$\sigma = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

- **Para Datos Agrupados en Tablas de Frecuencias:**

$$\sigma = \frac{f_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 \cdot (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + f_n \cdot (x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

- **Para Datos Agrupados en Intervalos:**

$$\sigma = \frac{f_1 \cdot (c_1 - \bar{x})^2 + f_2 \cdot (c_2 - \bar{x})^2 + \cdots + f_n \cdot (c_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

PROPIEDADES DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR Y LA VARIANZA

- Ambas medidas son siempre un número no negativo.
- Ambas dan como resultado 0 solo cuando todos los datos son iguales.
- Si cada dato aumenta o disminuye en una constante C, la desviación estándar y la varianza originales no cambien.

REGLAS DE LAS PROBABILIDADES

CONCEPTOS ELEMENTALES

- **Experimento:** Procedimiento que se puede llevar a cabo, bajo las mismas condiciones, un numero indefinido de veces.
- **Experimento Aleatorio:** Experimento cuyo resultado no se puede predecir, existiendo un conjunto de resultados posibles.
- **Espacio Muestral:** Es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- **Evento:** Es el subconjunto del espacio muestral.
- **Evento Cierto:** Es del propio espacio muestral.
- **Evento Imposible:** Es aquel que no tiene elementos, es decir, el subconjunto vacío (Ø) del espacio muestral.
- **Evento Mutuamente Excluyentes:** Son aquellos eventos donde la ocurrencia de uno de ellos impide la ocurrencia del otro.
- **Eventos Independientes:** Son aquellos en los que la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.
- **Eventos Complementarios:** Son aquellos que no tienen elementos comunes pero juntos completan el espacio muestral.

PROBABILIDAD CLÁSICA O REGLA DE LAPLACE

Si en un experimento aleatorio todos los resultados tienen igual probabilidad de ocurrencia (equiprobables), entonces la probabilidad de que ocurra el suceso X es la razón entre el numero de casos favorables al suceso X y el número total de casos posibles.

$$\mathbf{P(X)} = \frac{\textbf{Número de casos favorables (X)}}{\textbf{Número total de casos}}$$

PROBABILIDADES DE EVENTOS

Dado un especio muestral E y los eventos A y B, contenidos en E, se definen:

- **Unión de Eventos No Excluyentes:** Si A y B son dos eventos no excluyentes (pueden ocurrir simultáneamente), la probabilidad de que ocurran A o B o ambos está dada por:
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

- **Unión de Eventos Excluyentes:** Si A y B son dos eventos excluyentes (no ocurren simultáneamente), la probabilidad de que ocurran A o B está dada por:
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

- **Intersección de dos Eventos Independientes:**
Los sucesos A y B se consideran independientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de uno no influye sobre la ocurrencia del otro. Entonces, la probabilidad de que ocurra A y B (al mismo tiempo) es:
$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

La probabilidad condicional de B dado que ocurrió A esta dada por:

$$\mathbf{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

PROBABILIDAD EMPÍRICA

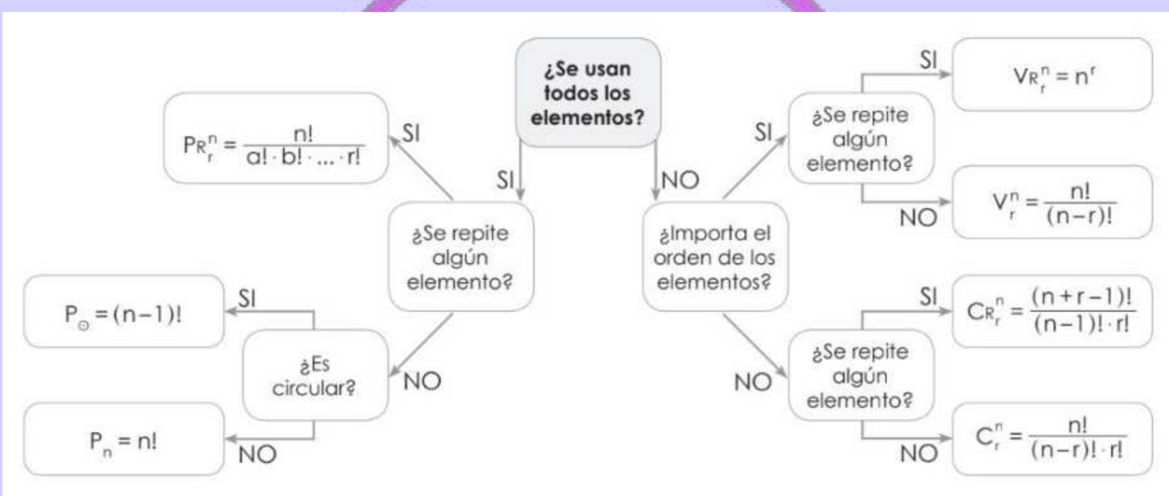
Si A es un evento que puede ocurrir cuando se realiza un experimento aleatorio, entonces la probabilidad empírica del evento X esta dada por la frecuencia relativa:

$$\mathbf{f_r(A) = \frac{Número\ de\ veces\ que\ ocurre\ el\ evento\ A}{Número\ de\ veces\ que\ se\ realiza\ el\ experimento}}$$

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La ley de los grandes números dice que si un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, la probabilidad empírica de A se aproximara a la probabilidad teórica de que ocurra A.

PERMUTACIÓN Y COMBINATORIA



TÉCNICAS DE CONTEO

El análisis combinatorio es la rama de la matemática que estudia el número de posibilidades de ocurrencia de un suceso, sin necesariamente descubrir todas las posibilidades. Si un suceso puede ocurrir de **a** maneras diferentes y otro suceso **b** de maneras diferentes, entonces se cumplen dos principios:

PRINCIPIO MULTIPLICATIVO: hay $\boldsymbol{a \cdot b}$ maneras diferentes en que pueden ocurrir ambos sucesos.

PRINCIPIO ADITIVO: hay $\boldsymbol{a + b}$ maneras diferentes en que puede ocurrir uno y solo uno de estos sucesos.

FACTORIALES

Sea n un numero natural, se llama **factorial de n** o **n factorial**, al producto de los n primero números naturales:

$$\mathbf{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

- Importante: $0! = 1! = 0$

PERMUTACIONES

Las permutaciones son cada una de las diferentes formas de ordenar que se pueden realizar con todos los elementos de un conjunto.

- **Permutación Simple o Lineal:** El número de permutaciones que pueden hacerse con n elementos diferentes en disposición lineal, está dada por:

$$\mathbf{P_n = n!}$$

- **Permutación con Repetición:** El número de permutaciones de **n** elementos, de los cuales k_1 son iguales, k_2 son iguales, …, k_r son iguales, está dada por:

$$\mathbf{P_n = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}}$$

- **Permutación Circular:** El número de maneras diferentes en que se pueden ordenar **n** elementos diferentes en disposición circular, está dada por:

$$\mathbf{P_{circular} = (n-1)!}$$

VARIACIONES

En un conjunto de **n** elementos, se denominan variaciones a diferentes ordenaciones que se pueden formar con **r** elementos $(\boldsymbol{r \leq n})$.

- **Variaciones Sin Repetición:** Dado un conjunto de **n** elementos, la cantidad de ordenaciones diferentes de **r** elementos que se pueden obtener, sin repetir, está dada por:

$$\mathbf{V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Una permutación es un caso particular de una variación sin repetición, cuando $\boldsymbol{n = r}$

- **Variaciones Con Repetición:** Dado un conjunto de **n** elementos, la cantidad de ordenaciones diferentes de **r** elementos que se pueden obtener, en los cuales se puede repetir uno o más, está dada por:

$$\mathbf{V_r^n = n^r}$$

COMBINACIONES

Son los diferentes grupos que se pueden formar con un total de **n** elementos de modo que cada grupo tenga **r** elementos $(\mathbf{0 \leq r \leq n})$.

- **Combinación Sin Repetición:** Dado un conjunto de **n** elementos, la cantidad de conjuntos de **r** elementos que se pueden obtener, sin repetición, está dada por:

$$\mathbf{C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}}$$

- **Combinación Con Repetición:** Dado un conjunto de **n** elementos, la cantidad de conjuntos de **r** elementos que se pueden obtener, con repetición, está dada por:

$$\mathbf{CR_r^n = C_r^{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!}}$$

$$\mathbf{C_r^n = \binom{n}{r}, \qquad C_n^n = C_0^n = C_1^n = 1, \qquad C_r^n = C_{n-r}^n}$$