

FUNCIÓN POTENCIA

La función de la forma $f(x) = a \cdot x^n$, con a y n números reales y $a \neq 0$ recibe el nombre de función potencia.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 & g(x) &= -\frac{3}{4}x^{-4} & h(x) &= -3x^3 & r(x) &= \frac{5}{6}x^{-5} \\ f(x) &= -2x^{\frac{1}{2}} \\ f(x) &= 3x^{-\pi} \end{aligned}$$

Gráfico de la Función Potencia

Se analizará la función potencia para exponente pares positivos y negativos, exponentes impares positivos y negativos, para coeficientes positivos y también negativos.

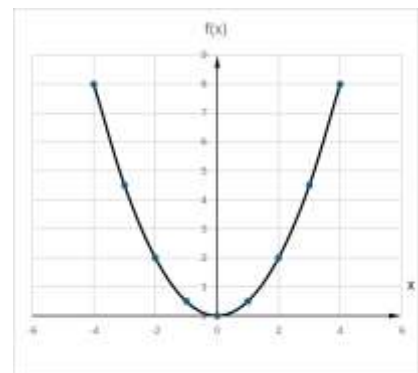
Exponente Par Positivo

Si en la función $f(x) = a \cdot x^n$ el exponente n es par positivo su gráfica será simétrica respecto al eje de las ordenadas.

Exponente par positivo y coeficiente positivo, en este caso las ramas de la gráfica se abren hacia arriba.

Se considerará para este caso la función $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$, su gráfica y características serán:

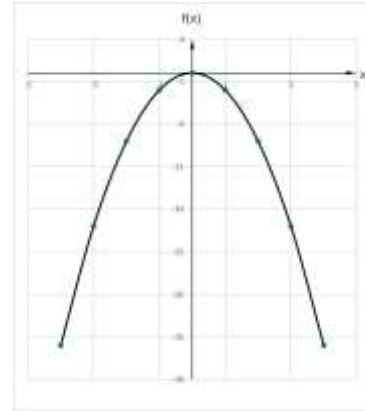
- Dominio: $\mathbb{R}$
- Recorrido: $\mathbb{R}_0^+$
- Punto Mínimo: $(0,0)$
- La gráfica se encuentra en el primer y segundo cuadrante.
- Decreciente: $]-\infty, 0[$
- Creciente: $]0, +\infty[$
- Convexa (ramificación hacia arriba)



Exponente par positivo y coeficiente negativo, las ramas de la gráfica se abren hacia abajo.

Se considerará para este caso la función $f(x) = -2 \cdot x^2$, su gráfica y características serán:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Recorrido: $\mathbb{R}_0^-$
- Punto Máximo: $(0,0)$
- La gráfica se encuentra en el tercer y cuarto cuadrante.
- Creciente: $]-\infty, 0[$
- Decreciente: $]0, +\infty[$
- Cóncava (ramificación hacia abajo)



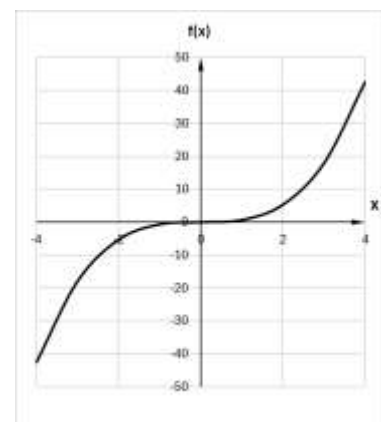
Exponente Impar Positivo

Si en la función $f(x) = a \cdot x^n$ el exponente n es impar positivo su gráfica será simétrica respecto al origen del sistema cartesiano.

Exponente impar positivo y coeficiente positivo.

Se considerará para este caso la función $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3$, su gráfica y características serán:

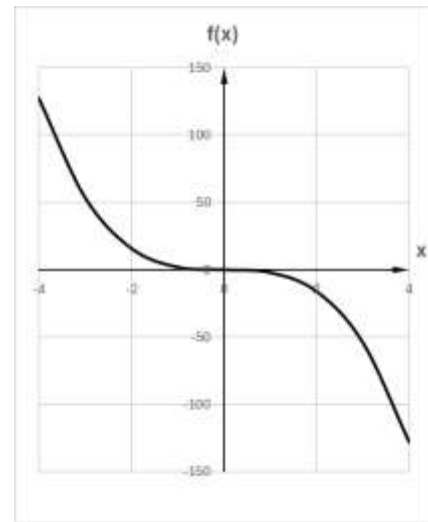
- Dominio: $\mathbb{R}$
- Recorrido: $\mathbb{R}$
- La gráfica se encuentra en el primer y tercer cuadrante.
- Creciente: $]-\infty, +\infty[$
- Punto de inflexión: $(0,0)$
- Cóncava: $]-\infty, 0[$
- Convexa: $]0, +\infty[$



Exponente impar positivo y coeficiente negativo.

Se considerará para este caso la función $f(x) = -2 \cdot x^3$, su gráfica y características serán:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Recorrido: $\mathbb{R}$
- La gráfica se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante.
- Decreciente: $]-\infty, +\infty[$
- Punto de inflexión: $(0,0)$
- Cóncava: $]0, +\infty[$
- Convexa: $]-\infty, 0[$

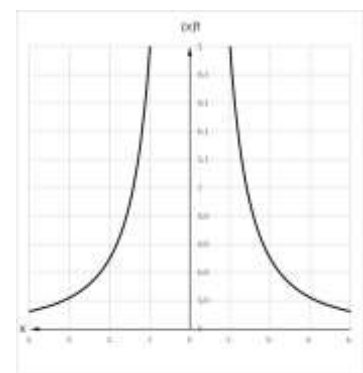


Exponente Par Negativo

Si en la función $f(x) = a \cdot x^n$ el exponente **n** es par negativo, la gráfica de la función tendrá dos asíntotas, que son el eje x y el eje y.

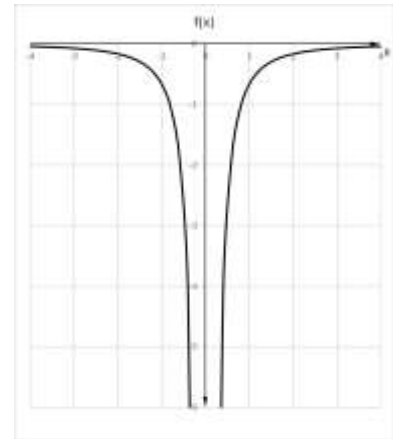
Para **n** par negativo y **a** coeficiente real positivo, se considerará la función $f(x) = 2 \cdot x^{-2}$, su gráfica y características serán:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Recorrido: $\mathbb{R}^+$
- La función es creciente para los valores negativos de x.
- La función es decreciente para los valores positivos de x.
- La gráfica se encuentra en el primer y segundo cuadrante.
- Convexa: $]-\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$



Para **n** par negativo y **a** coeficiente real negativo, se considerará la función $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-2}$, su gráfica y características serán:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Recorrido: $\mathbb{R}^-$
- La función es creciente para los valores positivos de x.
- La función es decreciente para los valores negativos de x.
- La gráfica se encuentra en el tercer y cuarto cuadrante.
- Cóncava: $] -\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$

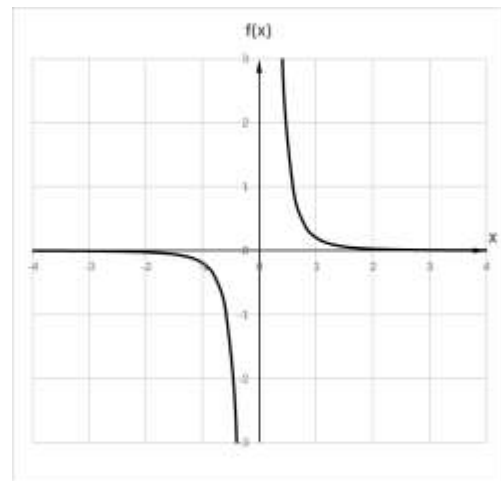


Exponente Impar Negativo

Si en la función $f(x) = a \cdot x^n$ el exponente **n** es impar negativo, la gráfica de la función tendrá dos asíntotas, que son el eje x y el eje y.

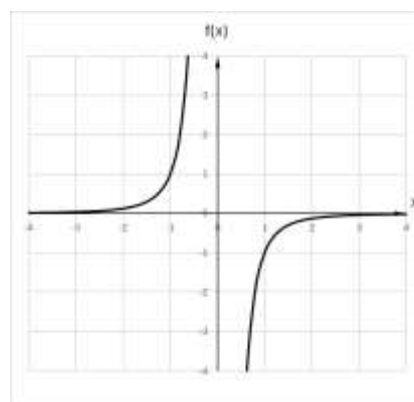
Para **n** impar negativo y **a** coeficiente real positivo, se considerará la función $f(x) = \frac{1}{5}x^{-3}$, su gráfica y características serán:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Recorrido: $\mathbb{R} - \{0\}$
- La función es $] -\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$
- La gráfica se encuentra en el primer y tercer cuadrante.
- Cóncava: $] -\infty, 0[$
- Convexa; $]0, +\infty[$



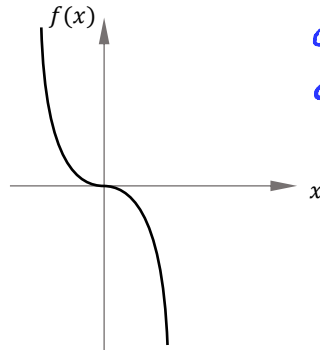
Para **n** impar negativo y **a** coeficiente real negativo, se considerará la función $f(x) = -x^{-3}$, su gráfica y características serán:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Recorrido: $\mathbb{R} - \{0\}$
- La función es creciente en $]-\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$
- La gráfica se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante.
- Cóncava; $]0, +\infty[$
- Convexa: $]-\infty, 0[$



EJERCICIOS

1. En la figura adjunta se tiene la representación gráfica de una función potencia $f(x) = a \cdot x^n$.



- Como la gráfica es simétrica al origen entonces sabemos que n es impar

- Como la curva se encuentra en el 2º y 4º cuadrante entonces a es negativo

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto a esta función?

- A) a es positivo y n es negativo.
 - B) a es positivo y n es par.
 - ☒ C) a es negativo y n es impar.
 - D) a es igual a 1 y n es negativo.
2. ¿Cuál de las siguientes situaciones **no** se puede modelar usando una función potencia?
- A) El área de un rectángulo de lado l^4 y cuyo ancho mide el 25% de lo que mide el largo.
 - B) El perímetro de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $10a^5$ y uno de sus catetos mide $8a^5$.
 - C) El volumen de un cilindro cuyo radio basal mide la quinta parte de lo que mide la altura.
 - ☒ D) El área de un cuadrado de lado $(x - 2)^3$.

La alternativa D toma la siguiente forma:

$$A(x) = (x-2)^6$$

Esto es distinto a la forma $f(x) = a \cdot x^n$

3. Los gráficos I y II adjuntos son representativos de las funciones del tipo $f(x) = a \cdot x^n$.

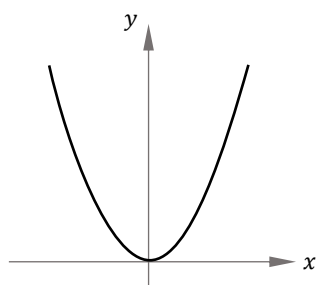


Gráfico I

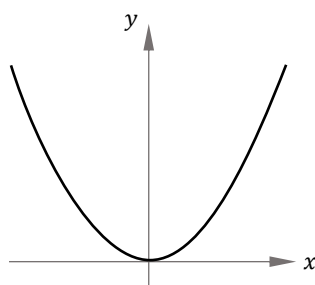


Gráfico II

Según la forma de estas curvas, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

- A) En ambos gráficos, **a** tiene el mismo valor.
☒ B) Si **n** es igual en ambos gráficos, entonces **a** es menor en el gráfico II.
 C) En el gráfico I, **a** y **n** son menores que en gráfico II.
 D) En ambos gráficos el cuadrado de **a** es mayor que 1.

con **n** igual, mientras
 mayor sea **a**, entonces
 mas cerca del Eje y
 estará la curva.

4. Si $f(x)$ es una función potencia definida como $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, entonces $f(4) + f(8) =$

- A) $2^{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$
 B) $2^{5\sqrt{2}}$
 C) $12 \cdot 2^{\sqrt{2}}$
☒ D) $2^{2\sqrt{2}}(1 + 2^{\sqrt{2}})$

$$f(4) = 4^{\sqrt{2}}$$

$$f(8) = 8^{\sqrt{2}}$$

$$f(4) + f(8) = 4^{\sqrt{2}} + 8^{\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}} + 2^{3\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}}(1 + 2^{\sqrt{2}})$$

5. Si $f(x) = 2 \cdot x^{\frac{2}{3}}$, entonces $f(8) =$

- A) 4
 B) 6
 C) 18
☒ D) 8

$$f(8) = 2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2 \cdot 2^{3 \cdot \frac{2}{3}}$$

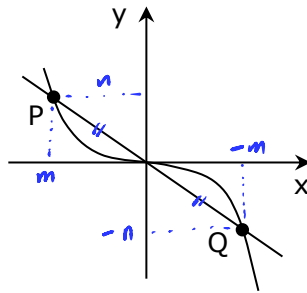
$$= 2 \cdot 2^2 = 8$$

6. Si $h(x) = -\frac{2}{5}x^4$ tiene como dominio el conjunto de los números reales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- ☒ A) La función **h** tiene un eje de simetría.
 B) El gráfico de la función **h**, es simétrico respecto al origen.
 C) La función **h** es decreciente en todo su dominio.
 D) Las ramas de la función se abren hacia arriba.

verdadero, pues **n** es par (Eje Y es el eje de simetría)

7. En la figura adjunta se representan las gráficas de las funciones $f(x) = -x$ y $g(x) = -x^3$.



Si las coordenadas de P son (m, n) , ¿cuáles son las coordenadas de Q?

- A) (m, n)
- ☒ B) $(-m, -n)$
- C) $(n, -m)$
- D) $(-n, -m)$
- E) $(-m, n)$

• como las curvas son simétricas respecto al origen, entonces P y Q deben tener la misma distancia al origen, luego:
 $Q = (-m, -n)$

8. ¿Cuál de las siguientes funciones es simétrica con respecto al origen?

- A) $f(x) = 3x^4$
- B) $g(x) = -2x^6$
- C) $h(x) = (x - 2)^3$
- D) $t(x) = (x + 1)^5$
- ☒ E) $r(x) = -4x^3$

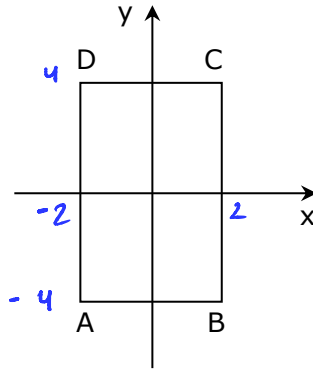
} pese a que tienen exponente impar, están desplazados
 ↳ tiene exponente impar

9. Si $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$ tiene como dominio el conjunto de los números reales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- A) El gráfico de la función f es simétrica respecto al eje de las ordenadas.
- ☒ B) El gráfico de la función f está en el segundo y cuarto cuadrante.
- C) $f(x) = f(-x)$
- D) $f(4) = -4$

verdadero, pues cumple $a < 0$
 y n impar

10. En el rectángulo ABCD de la figura adjunta los ejes cartesianos son sus ejes de simetría.



Si A(-2, -4), ¿cuál de las siguientes funciones tienen gráficas que pasan por dos vértices de este rectángulo?

- A) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ → pasa por los vértices A y C
 B) $g(x) = x^2$ → pasa por los vértices D y C
 C) $h(x) = -\frac{1}{2}x^3$ → pasa por los vértices B y D
 D) Todas las gráficas pasan por dos de los vértices del rectángulo.

11. Sean las funciones reales $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ y $h(x) = x^4$, ¿cuál de las siguientes desigualdades es verdadera?

- A) $f(x) < g(x) < h(x)$ para todo número real.
 B) $f(x) < g(x) < h(x)$ para todo número real distinto de 0 y de 1.
 C) $f(x) < g(x) < h(x)$ para todo número real positivo distinto de 1.
 D) $f(x) < g(x) < h(x)$ para todo número real negativo distinto de -1.
 E) $f(x) < g(x) < h(x)$ para todo número real mayor que 1.

(Fuente, DEMRE 2011)

- si x es negativo entonces $g(x) < f(x)$
- si $0 < x < 1$ entonces $f(x) > g(x) > h(x)$
- solo con $x > 1$ se cumple que $f(x) < g(x) < h(x)$

12. Si $f(x) = 4x^2$, $g(x) = x^3$ y $h(x) = x^4$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

- I) $f(x) \neq g(x)$, para todo número real x distinto de cero. $F \rightarrow f(4) = g(4)$
 II) $f(x) = h(x)$, para algún número real x distinto de cero. $V \rightarrow f(2) = h(2)$
 III) $f(x) < g(x) < h(x)$, para todo número real x distinto de cero. F

$$f(2) = h(2)$$

- A) Solo I
☒ B) Solo II
 C) Solo III
 D) Solo I y II
 E) Solo II y III

(Fuente, DEMRE 2009)

13. Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{3}x^2$ y $h(x) = 3x^2$, ¿cuál de las siguientes opciones es correcta?

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

$$h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow h\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{3}\right) > g\left(\frac{1}{3}\right)$$

- A) $f\left(\frac{1}{3}\right) < g\left(\frac{1}{3}\right) < h\left(\frac{1}{3}\right)$
☒ B) $g\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right) < h\left(\frac{1}{3}\right)$
 C) $f\left(\frac{1}{3}\right) < h\left(\frac{1}{3}\right) < g\left(\frac{1}{3}\right)$
 D) $g\left(\frac{1}{3}\right) < h\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$
 E) $f\left(\frac{1}{3}\right) < g\left(\frac{1}{3}\right) = h\left(\frac{1}{3}\right)$

(Fuente, DEMRE 2010)

14. La función potencia $f(x) = x^n$ se traslada verticalmente hacia abajo 2 unidades, resultando la función $g(x)$, en esta nueva función, la imagen de 2 es 30, entonces $n^2 + 3 =$

$$g(x) = x^n - 2$$

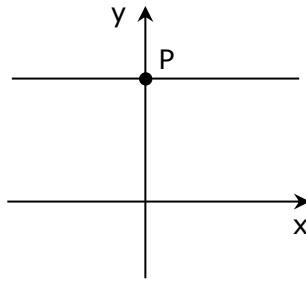
$$g(2) = 30 \Rightarrow 2^n - 2 = 30$$

$$2^n = 32 \Rightarrow n = 5$$

$$\text{luego, } n^2 + 3 = 28 \\ = g(2) - 2$$

- A) $g(2)$
 B) $g(2) + 2$
☒ C) $g(2) - 2$
 D) $g(2) + 5$

15. En la figura adjunta se muestra la recta representativa de la función $y = 3$.



¿La gráfica de cuál de las siguientes funciones corta a la recta a mayor distancia del punto P?

- A) $y = -x^4$
 B) $y = x^4$
 C) $y = \frac{1}{4}x^4$
 D) $y = -4x^4$

mientras menor sea a , entonces mas alejado del Eje x estará la curva

16. Si $g(x) = x^3$, entonces $\frac{g(p) + g(q)}{p + q}$, con $p \neq -q$, es

- A) $p^2 + q^2$
 B) $p^2 - pq + q^2$
 C) $p^2 - q^2$
 D) $(p + q)^2$
 E) $p^2 + pq + q^2$

$$\frac{p^3 + q^3}{p + q} = p^2 - pq + q^2$$

17. Si $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ y $g(x) = \sqrt[5]{x^3}$, ¿cuál de las siguientes funciones resultante de la operación indicada, no corresponde a una función potencia?

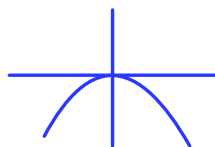
- A) $f(x) \cdot g(x)$
 B) $f(x) + g(x)$
 C) $\frac{f(x)}{g(x)}$
 D) $[f(x)]^{-1} \cdot g(x)$

$\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x^3}$ no tiene la forma $a \cdot x^n$

18. La gráfica de la función potencia $f(x) = a \cdot x^n$ se encuentra en el cuadrante III y el cuadrante IV, entonces en relación al coeficiente a y al exponente n , se cumple

- A) $a > 0$ y n impar negativo.
 B) $a < 0$ y n impar positivo.
 C) $a > 0$ y n par positivo.
☒ D) $a < 0$ y n par negativo.

n tiene que ser par y $a < 0$



19. La gráfica de la función potencia $f(x) = a \cdot x^n$ se encuentra en el cuadrante I y III, si:

- (1) $a = 2$
 (2) $n = -3$
 A) (1) por sí sola
 B) (2) por sí sola
☒ C) Ambas juntas, (1) y (2)
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 E) Se requiere información adicional

n tiene que ser impar

y $a > 0$

luego se necesitan (1) y (2)

20. Se puede determinar que la función $f(x) = a \cdot x^n$, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, es creciente, si se sabe que:

- (1) n es un impar mayor que uno.
 (2) a es un número real positivo.
 A) (1) por sí sola
 B) (2) por sí sola
☒ C) Ambas juntas, (1) y (2)
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 E) Se requiere información adicional

necesitamos n impar > 1

y a positivo

luego se necesita (1) y (2)

RESPUESTAS

1.	C	6.	A	11.	E	16.	B
2.	D	7.	B	12.	B	17.	B
3.	B	8.	E	13.	B	18.	D
4.	D	9.	B	14.	C	19.	C
5.	D	10.	D	15.	C	20.	C